

НКТП СССР  
ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АВИАЦИОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

---

Труды Центрального аэро-гидродинамического института  
им. проф. Н. Е. Жуковского

Выпуск 240

# СБОРНИК ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ЦАГИ

III

ИЗДАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО АЭРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
им. проф. Н. Е. ЖУКОВСКОГО

Москва

1 9 3 5

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем сборнике ОТГ собрано краткое изложение докладов научных заседаний Общетеоретической группы ЦАГИ, сделанных в течение 1934—1935 гг.

Темами докладов являются различные вопросы гидро- и аэродинамики и теории упругости и их технические приложения,

Цель, которую ставит настоящий сборник, та же, что и двух его первых выпусков (см. Технич. заметки ЦАГИ № 45 и № 52): ускорить использование получаемых в ЦАГИ научных результатов в всеми исследователями, работающими в различных отделах теоретической и прикладной механики.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

С. А. Чаплыгин. О силах, действующих на цилиндр, обтекаемый потоком с образованием поверхностей разрыва . . . . .	5
В. В. Голубев. К теории разрезного крыла . . . . .	14
Ф. Франкль. Теплопередача в турбулентном пограничном слое при больших скоростях в сжимаемом газе . . . . .	18
Ф. Франкль и В. Войшель. Трение в турбулентном пограничном слое при больших скоростях в сжимаемом газе . . . . .	23
Д. Ю. Панов. К вопросу о положении центра жесткости . . . . .	28
Н. Зволинский. Об устойчивости цилиндрической оболочки при сдвиге . .	34
Н. Зволинский. Об устойчивости цилиндрической оболочки при кручении	38
Л. С. Лейбензон. Энергетическая форма интегрального условия в теории пограничного слоя . . . . .	41
Л. С. Лейбензон. К теории турбулентного пограничного слоя . . . . .	45
Л. С. Лейбензон. О центре изгиба тонкостенных незамкнутых профилей .	49

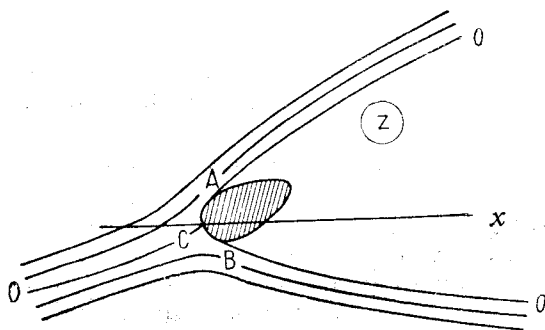
---

# О СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЦИЛИНДР, ОБТЕКАЕМЫЙ ПОТОКОМ С ОБРАЗОВАНИЕМ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА<sup>1</sup>

В моем сообщении я излагаю работу, относящуюся к очень давнему времени: в несколько иной форме ее основные результаты послужили предметом моих докладов в Московском математическом обществе лет 25 тому назад. Я, однако, не опубликовал полученных мною формул, так как надеялся усовершенствовать свой метод с тем, чтобы можно было освободиться от одного неприятного стеснения, а именно, зависимости очертаний обтекаемого цилиндра от направления потока. К сожалению, я не достиг этого, и в настоящее время решил опубликовать результаты в том виде, в котором они были мною получены.

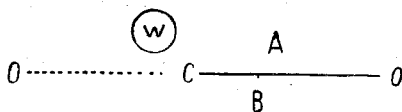
\* \*  
\*

Представим себе безграничный поток, обтекающий плоскопараллельным течением цилиндр, причем струи срываются с цилиндра в некоторых точках его периметра; позади цилиндра находится область спокойной жидкости.



Фиг. 1.

Область характеристической функции  $w = \varphi + i\psi$  представляется полной плоскостью с разрезом  $CO$  по действительной оси.



Фиг. 2.

Бесконечно удаленные точки областей  $z$  и  $w$  обозначим буквой  $O$ . Отображаем обе области на полукруг радиуса 1 в плоскости  $u$ . Для функции  $w$  будем иметь простое соотношение:

$$\frac{1}{v_0 a} \frac{dw}{du} = \frac{(u^2 - 1)(u - e^{ai})(u - e^{-ai})}{u^3} = \frac{(u^2 - 1)(u^2 + 1 - 2u \cos \alpha)}{u^3}. \quad (1)$$

Соответствующие точки во всех случаях отмечены одинаковыми буквами.

<sup>1</sup> Доложено в собрании ОТГ ЦАГИ 8 января 1935 г.

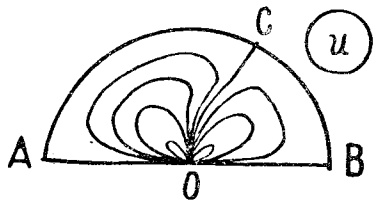
Таким образом, контуру обтекаемой части цилиндра соответствует полуокружность, точка  $C$  которой соответствует точке раздела линии тока  $\psi = 0$ , а точки  $A$  и  $B$  — точкам срыва струй.

Диаметр  $AOB$  соответствует срывающимся струям и точка  $u = 0$  — бесконечно удаленным точкам потока.

Чтобы отобразить поток, положим:

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = Ke^{-iF(u)}, \quad (2)$$

где  $F(u)$  — функция реальная на действительной оси полукруга  $u$ , всюду на его плоскости конечная и непрерывная; на струе геометрическое значение  $F(u)$  представляется углом направления скорости; на полуокружности  $F(u)$  имеет логарифмическую бесконечность в точке  $C$ ; может иметь и иные такого же характера особенности в точках, соответствующих угловым точкам контура, если таковые существуют. Для весьма широкого класса контуров формуле (2) можно придать весьма простой вид, положив:



Фиг. 3.

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = K \left( \frac{e^{\alpha i} - u}{e^{-\alpha i} - u} \right)^n \left( \frac{u - be^{\beta i}}{u - be^{-\beta i}} \right)^m \left( \frac{u - b_1 e^{\beta_1 i}}{u - b_1 e^{-\beta_1 i}} \right)^{m_1} \dots \quad (3)$$

или:

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = K \left( \frac{e^{\alpha i} - u}{e^{-i\alpha} - u} \right)^n \prod \left( \frac{u - be^{\beta i}}{u - be^{-\beta i}} \right)^m.$$

где

$$K = e^{-2\alpha ni - \sum \beta_i m_i}, \quad (4)$$

Числа  $b, \beta, m, n$  реальны,  $b > 1, n > 0$ .

Если комплексная скорость выражается формулой (2) или (3), то ясно, что условие постоянства скорости, а следовательно, и давления на струе удовлетворяется, так как модули функций (2) или (3) при реальном  $u$  равны единице.

Если же мы положим  $u = e^{\lambda i}$ , то найдем значение скорости в различных точках контура цилиндра. В частности, при  $u = e^{\alpha i}$  имеем нулевую точку; при этом, если  $n = 1$ , то это будет обыкновенная точка контура; при  $2 > n > 1$  мы получим выступающую угловую точку, а при  $n < 1$  — входящий угол контура. Далее, если какое-нибудь из количеств  $b$  равно 1, то мы получим угловую точку контура с входящим углом, если соответственное  $m$  — положительная дробь. Вдали от цилиндра поток направлен по оси  $x$ , так как для  $u = 0$  мы находим  $\frac{dw}{dz} = v_0$ .

Приведенные утверждения могут быть проверены рассмотрением вытекающей из формул (1) и (3).

$$\frac{K dz}{a du} = \frac{(u^2 - 1)(u - e^{\alpha i})(u - e^{-\alpha i})}{u^3} \left( \frac{u - e^{-\alpha i}}{u - e^{\alpha i}} \right)^n \prod \left( \frac{u - be^{-\beta i}}{u - be^{\beta i}} \right)^m, \quad (5)$$

которую в сокращенной форме запишем в виде:

$$\frac{K dz}{a du} = \frac{f(u)}{u^3} e^{iF(u)}, \quad (6)$$

введя обозначение

$$(u^2 - 1)(u^2 + 1 - 2u \cos \alpha) = f(u).$$

Посмотрим, какой вид имеет струя в весьма далеких точках, т. е. в области прилежащей к точке  $u=0$  полукруга

$$\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = -1 + 2u \cos \alpha + u^3$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} e^{iF(u)} = K \left\{ 1 + iuF' + \frac{iF'' - F'^2}{2} u^2 + \dots \right\},$$

где

$$F' = F'(0), \quad F'' = F''(0).$$

Воспользовавшись этими разложениями, получим для  $u \rightarrow 0$ :

$$\frac{z}{a} = \frac{1}{2u^2} + \frac{iF'}{u} + \left( -\frac{iF''}{2} + \frac{F'^2}{2} + 2iF' \cos \alpha \right) \lg u. \quad (7)$$

На струе, отходящей вверх (фиг. 1),  $u$  будет реально положительно, из ф-лы (7) находим:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2u^2} + \frac{F'^2}{2} \lg u;$$

$$\frac{y}{a} = \frac{F'}{u} + \left( 2F' \cos \alpha - \frac{F''}{2} \right) \lg u. \quad (7')$$

Для нижней струи:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2u^2} + \frac{F'^2}{2} \lg(-u) - \left( 2F' \cos \alpha - \frac{F''}{2} \right) \pi;$$

$$\frac{y}{a} = \frac{F'}{u} + \left( 2F' \cos \alpha - \frac{F''}{2} \right) \lg(-u) + \frac{\pi}{2} F'^2. \quad (7'')$$

Приняв во внимание главные члены выражений координат, находим, что очертания далеких частей струи можно уподобить параболе, выраженной уравнением:

$$y^2 = 2px, \quad (8)$$

где  $p = aF'^2$  — параметр параболы.

В случае  $F' = F'(0) = 0$  контур струи определится в далеких точках уравнением:

$$x = \frac{a}{2} e^{hy}, \quad h = \frac{4}{aF''}. \quad (9)$$

Обратимся к вычислению действующих на цилиндр сил. Для их определения применим нашу формулу:

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int \frac{dw}{dz} dw,$$

которая приводится на основании (1) и (2) к следующему виду:

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} a v_0^2 K \oint \frac{f(u)}{u^3} e^{-iF(u)} du. \quad (10)$$

Подинтегральная функция отличается от выражения (6) для  $\frac{dz}{d\omega}$  только знаком при мнимой единице; поэтому значение  $Y + iX$ , которое получится умножением на  $\pi \rho i a v_0^2$  вычета означенной функции в точке  $\omega = 0$ , приведет к следующей форме:

$$Y + iX = \pi \rho i a v_0^2 \left\{ \frac{F'^2}{2} + i \left( 2F' \cos \alpha - \frac{F''}{2} \right) \right\}.$$

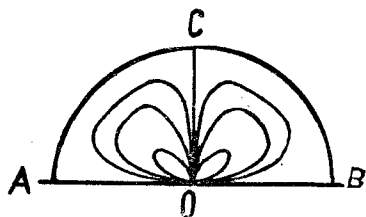
Отсюда получаем для силы лобового сопротивления выражение:

$$X = \frac{\pi}{2} \rho a v_0^2 F'^2 = \frac{\pi}{2} \rho p v_0^2, \quad (11)$$

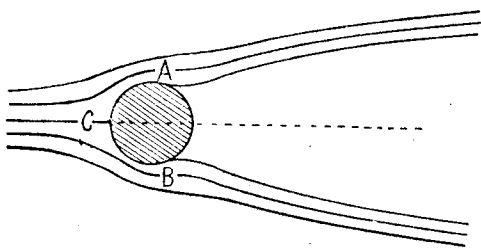
и для подъемной силы:

$$Y = \pi \rho a v_0^2 \left( \frac{F''}{2} - 2F' \cos \alpha \right). \quad (12)$$

Лобовое сопротивление, таким образом, оказывается независимо от формы цилиндра пропорциональным параметру той параболы, которая определяет очертание далеких частей срывающейся струи.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Можно еще несколько иначе охарактеризовать геометрически формулы (11) и (12). Обратимся для этого к найденным выше выражениям (7') и (7'') для координат контура далеких частей струи. Легко видеть, что величины

$$\pi a \left( \frac{F''}{2} - 2F' \cos \alpha \right) = d, \quad \frac{\pi a}{2} F'^2 = c \quad (12')$$

определяют собой смещение по осям  $x$  и  $y$  нижней параболической дуги струи по отношению к верхней, если парабола разрезана на две части в вершине. Через эти смещения интересующие нас силы выразятся такими простыми формулами:

$$X = \rho c v_0^2, \quad Y = \rho d v_0^2. \quad (13)$$

В частности, если параметр параболы есть нуль и она дегенерируется в кривую (9), то  $c = 0$  и мы имеем лишь подъемную силу

$$Y = \rho d v_0^2 = \frac{\pi \rho a}{2} F'' v_0^2. \quad (14)$$

Среди разнообразных профилей, определяемых формулами (1), (3) и (5), интересно выделить симметричные по отношению к оси  $Ox$  направлению потока; таковы будут, например, профили судов, движущихся по направлению своей плоскости симметрии.

Легко видеть, что в таком случае течение должно иметь ту же симметрию и потому в сопряженных точках границы судна функции, представляющие комплексные скорости, также должны иметь сопряженные значения.

В области  $u$  сопряженным точкам  $M$  и  $N$  области  $z$  будут соответствовать точки, симметрично расположенные по отношению к  $O\eta$ . Отсюда следует, что точка  $O$  должна отобразиться в конце радиуса, направленного по мнимой оси, и стало-быть, в формуле (1) надо положить  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Далее формула (3) для комплексной скорости должна быть такова, чтобы при замене  $u = e^{\lambda i}$  на  $u = e^{(\pi - \lambda)i} = -e^{-\lambda i}$  она переходила в сопряженную величину.

Следовательно, должно иметь место равенство:

$$K \left( \frac{e^{\lambda i} - i}{e^{\lambda i} + i} \right)^n \prod \left( \frac{e^{\lambda i} - be^{\beta i}}{e^{\lambda i} - be^{-\beta i}} \right)^m = \\ = \text{сопряженное } K_1 \left( \frac{e^{-\lambda i} + i}{e^{-\lambda i} - i} \right) \prod \left( \frac{e^{-\lambda i} + be^{\beta i}}{e^{-\lambda i} + be^{-\beta i}} \right)^m.$$

Чтобы это соотношение было выполнено, необходимо и достаточно заменить формулу (13) формулой:

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \left( \frac{i - u}{i + u} \right)^n \prod \left( \frac{u - be^{-\beta i}}{u + be^{\beta i}} \right)^m \left( \frac{u + be^{\beta i}}{u + be^{-\beta i}} \right)^m, \quad (15)$$

ибо при замене в этой формуле  $u = e^{\lambda i}$  на  $u = -e^{-\lambda i}$  значение этой функции переходит в сопряженное. Легко видеть, что струя в свою очередь будет иметь плоскость симметрии  $oxz$ , так как с изменением знака реального  $u$  на обратный значение функции (15) также переходит в сопряженное. Числом  $n$  характеризуется носовой угол судна, равный  $\pi n$ . Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае симметричного цилиндра  $F'' = F''(0) = 0$ ; а так как  $\cos \alpha$  также есть нуль, то по первой из формул (12')  $\partial = 0$ , и, следовательно, определяемая этим количеством подъемная сила  $Y$ , как показывают формулы (13) и (14), обращается в нуль; очевидно, так и следовало ожидать.

Сила лобового сопротивления попрежнему определяется формулой (11) или первой из (13) и обращается в нуль, если параметр параболы сам равен 0; а это будет иметь место, если в далеких частях струя имеет конечную ширину.

В полученные нами формулы входит весьма значительное число произвольных коэффициентов, подбором которых можно распорядиться так, чтобы форма препятствия достаточно близко подходила к желаемому виду. О характере обтекаемого контура всего лучше можно судить исследуя эту кривизну. Составим по формулам (3) и (5) ее выражение; обозначая через  $R$  радиус кривизны, будем иметь, как известно:

$$\frac{1}{R} = \frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}},$$

или, вводя сопряженные мнимые переменные,

$$z = x + iy \quad z_1 = x - iy$$

$$\frac{2i}{R} = \left( \frac{d^2 z}{dz} - \frac{d^2 z_1}{dz_1} \right) \frac{1}{\sqrt{dz dz_1}}. \quad (18)$$

Ограничимся случаем симметричного цилиндра простейшего типа (с одним  $b$ ).

На струе имеем  $u$  реально; из указанных формул:

$$\frac{d^2 z}{dz} - \frac{d^2 z_1}{dz_1} = -4i \left( \frac{1}{1+u^2} + \frac{m \sin \beta}{u^2 + b^2 - 2ub \cos \beta} + \frac{m \sin \beta}{u^2 + b^2 + 2ub \cos \beta} \right) du,$$

$$\sqrt{dzdz_1} = a \frac{(1-u^2)(1+u^2)}{u^3} du.$$

Легко видеть, что в точке сбегания струи с тела, где  $u = \pm 1$ , мы получим всегда

$$\frac{1}{R} = \infty; \quad R = 0.$$

Обратимся теперь к обтекаемому контуру; здесь мы имеем:

$$u = e^{i\delta}, \quad \frac{du}{u} = i d\delta$$

и легко найдем в результате весьма простого подсчета:

$$\frac{d^2 z}{dz} - \frac{d^2 z_1}{dz_1} =$$

$$= mib(b^2 - 1) \sin \beta \sin \delta \frac{\{(b^2 + 1)^2 + 4b^2 \cos(\beta - \delta) \cos(\beta + \delta)\} d\delta}{\{(b^2 + 1)^2 - 4b^2 \cos^2(\beta - \delta)\} \{(b^2 + 1)^2 - 4b^2 \cos^2(\beta + \delta)\}}$$

$$\frac{\sqrt{dzdz_1}}{a} = 4 \sin \delta (1 + \sin \delta) d\delta \left\{ \frac{1 + b^2 - 2b \cos(\beta + \delta)}{1 + b^2 + 2b \cos(\beta + \delta)} \frac{1 + b^2 + 2b \cos(\beta - \delta)}{1 + b^2 - 2b \cos(\beta - \delta)} \right\}^{\frac{m}{2}},$$

а на основании вышеприведенной формулы для кривизны, вводя для простоты обозначение  $\frac{b^2 + 1}{2b} = h$ , получим:

$$\frac{a}{R} = m \frac{b^2 - 1}{2b} \frac{\sin \beta}{1 + \sin \delta} \frac{h^2 + \cos(\beta - \delta) \cos(\beta + \delta)}{[h^2 - \cos^2(\beta - \delta)] [h^2 - \cos^2(\beta + \delta)]} \times$$

$$\times \left\{ \frac{[h - \cos(\beta + \delta)] [h + \cos(\beta - \delta)]}{[h + \cos(\beta + \delta)] [h - \cos(\beta - \delta)]} \right\}^{\frac{m}{2}}.$$

В точке схода с препятствия  $\delta = 0$  и для определения кривизны мы имеем:

$$\frac{a}{R} = m \frac{b^2 - 1}{2b} \sin \beta \frac{h^2 + \cos^2 \beta}{(h^2 - \cos^2 \beta)^2}.$$

Пользуясь свободой выбора коэффициентов, мы можем добиться равенства кривизны в восьми точках контура по четыре с каждой стороны от плоскости его симметрии, или, что приводит к более простым уравнениям для определения постоянных, в вершине и трех парах точек с каждой стороны от указанной плоскости. Таким образом мы близко подходим к обтеканию круглого цилиндра.

Еще с гораздо большей точностью мы подойдем к желаемому виду обтекаемого цилиндра, увеличив число множителей в основной формуле; тогда появятся дополнительные произвольные коэффициенты  $b_1, b_2, \dots, m_1, m_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$ .

Что касается кривизны, то ее выражение легко найти в случае произвольного числа указанных коэффициентов. Рассматривая, для простоты, только симметричные контуры, мы получим для определения кривизны такую формулу:

$$\frac{La}{R} = \sum m \frac{b^2 - 1}{b} \sin \beta \frac{h^2 + \cos(\beta - \delta) \cos(\beta + \delta)}{[h^2 - \cos^2(\beta - \delta)][h^2 - \cos^2(\beta + \delta)]},$$

$$L = (1 + \sin \delta) \prod \left\{ \frac{[h + \cos(\beta + \delta)][h - \cos(\beta - \delta)]}{[h - \cos(\beta + \delta)][h + \cos(\beta - \delta)]} \right\}^{\frac{m}{2}}.$$

Здесь последовательные слагаемые суммы  $\Sigma$  получаются заменой  $m, b, \beta, h = \frac{b+1}{2b}$  соответственными коэффициентами со значком 1, 2, ..., символ  $\Pi$  обозначает произведение последовательных, таким же порядком составленных множителей.

Из приведенных формул ясно, что если все коэффициенты  $b$ , вообще большие единицы, становятся равными ей, то кривизна везде кроме точек  $\delta = \beta, \delta = \beta_1, \dots$ , будет нулем и таким образом мы получаем многоугольную преграду, состоящую из сомкнутых между собою плоских граней.

Употребленный нами метод позволяет при легком видоизменении разрешить задачу о потоке, набегающем на цилиндр, погруженный в жидкость на небольшую глубину, причем через него поток перебрасывает струйку конечной ширины; при ином изменении получится удар о цилиндр струи конечной ширины. Обе указанные задачи решаются, если для выражения комплексной скорости мы примем прежние формы (2) или (3), а выражение производной от характеристической функции изменим.

Достаточно положить для неглубоко погруженного цилиндра:

$$\frac{dw}{du} = av_0 \frac{(u^2 - 1)(u^2 + 1 - 2u \cos \alpha)}{u^2(u + c)}, \quad (16)$$

а для случая удара струи конечной ширины

$$\frac{dw}{du} = av_0 \frac{(u^2 - 1)(u^2 + 1 - 2u \cos \alpha)}{u(u + c)(u - d)}. \quad (17)$$

В дополнение к приведенным результатам дадим формулы, позволяющие весьма просто разрешать задачи о действии потока на препятствия в виде многоугольных стенок; в частности получим клин и пластинку. Полагаем в основной формуле (3)  $b = b_1 = b_2 = \dots = 1$ .

Тогда:

$$\frac{1}{v_0 a} \frac{dw}{dz} = K \left( \frac{e^{xi} - u}{e^{-xi} - u} \right)^n \prod \left( \frac{u - be^{\beta i}}{u - be^{-\beta i}} \right)^m$$

и на окружности мы будем иметь:

$$u = e^{\delta i}$$

$$\frac{1}{v_0 a} \frac{dw}{dz} = VK \frac{\sin^n \frac{\delta - \alpha}{2}}{\sin^n \frac{\delta + \alpha}{2}} \prod \frac{\sin^m \frac{\delta - \beta}{2}}{\sin^m \frac{\delta + \beta}{2}}, \quad (19)$$

где  $K$  определяется попрежнему соотношением (4).

Эта формула показывает, что стенка опирается на ломаную, состоящую из прямолинейных отрезков с угловыми точками

$$\delta = \alpha, \quad \delta = \beta, \quad \delta = \beta_1, \dots,$$

ибо формула (5) на окружности перейдет в следующий вид:

$$\sqrt{K} \frac{dz}{a d\delta} = 4 (\cos \alpha - \cos \delta) \sin \delta \frac{\sin^n \frac{\delta + \alpha}{2}}{\sin^n \frac{\delta - \alpha}{2}} \prod \frac{\sin^n \frac{\delta + \beta}{2}}{\sin^n \frac{\delta - \beta}{2}} \quad (20)$$

Точка  $\delta = \alpha$  представляет собою точку разветвления линии тока  $\psi = 0$ ; если  $n$  отлично от единицы, то это будет угловая точка контура; при  $n = 1$  разветвление имеет место в обыкновенной точке одной из плоских граней преграды. Контур препятствия будет обращен острыми углами в сторону спокойной области во всех угловых точках, кроме точки  $\delta = \alpha$ , если все  $\beta$  положительны, и тогда в угловых точках мы получим нулевые скорости. Что касается точки  $\delta = \alpha$ , то, как было сказано, при  $n = 1$  это будет точка плоской стенки; при  $n < 1$  получим в этой точке острый угол навстречу потоку, а при  $n > 1$  поток будет разделяться в тупом угле.

Наконец, придав постоянным значения

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_1 = \pi - \beta, \quad \beta_3 = \pi - \beta_2, \dots,$$

$$m = m_1, \quad m_2 = m_3, \dots,$$

мы получим обтекание преграды, симметричной относительно направления потока.

Особенно просто указанным приемом решаются основные задачи Кирхгофа и Рэли.

В самом деле, положим в формулах (3) и (5)

$$\beta = \beta_1 = \beta_2 = \dots = 0, \quad n = 1.$$

Получаем из (3)

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \frac{1 - ue^{-ai}}{1 - ue^{ai}},$$

из (5)

$$\frac{e^{2ai} dz}{a du} = \frac{(u^2 - 1)(1 - ue^{ai})^2}{u^3}.$$

Отсюда, положив  $u = e^{i\delta}$ , получим на пластинке

$$\frac{z}{a} = e^{ai} \{ 2\delta \sin \alpha + \cos (2\delta + \alpha) - 4 \cos \delta \} + \text{const.}$$

Длина пластинки  $l$  и ее угол  $\gamma$  с осью  $x$ , т. е. направлением потока, найдутся из формулы

$$\frac{\gamma = \pi}{\gamma = 0} \frac{z}{a} = \frac{l}{a} e^{i\gamma} = e^{ai} (2\pi \sin \alpha + 8),$$

откуда

$$l = 2a(4 + \pi \sin \alpha), \quad \gamma = \alpha.$$

Обращаясь к отысканию действующих сил, найдем по формуле (10), которая в этом случае переходит в

$$Y + iX = -\frac{\rho a v_0^2}{2} \int \frac{(1 - u e^{-ai})^2 (u^2 - 1) du}{u^3}.$$

Взяв интегральный вычет полюса  $u = 0$ , находим

$$Y + iX = -2\pi \rho a v_0^2 e^{-ai} \sin \alpha. \quad (21)$$

Таким образом, давление, как и следует, перпендикулярно к пластинке и его величина  $P$  определяется, как модуль формулы (20),  $P = 2\pi \rho a v_0^2 \sin \alpha$ , и по замене  $a$  его значением из выше найденной формулы для длины пластинки  $l$  мы приходим к формуле Рэли

$$P = \frac{\pi \sin \alpha}{\frac{1}{4} + \pi \sin \alpha} \rho l v_0^2.$$

В заключение дадим вкратце указания, как разрешить задачу об истечении из сосуда, ограниченного криволинейными стенками. Принимая тот же полукруг для вспомогательного переменного  $u$ , отобразим на нем область характеристической функции при помощи соотношения:

$$\frac{1}{av_0} \frac{dw}{du} = \frac{u^2 - 1}{u(u - e^{ai})(u - e^{-ai})},$$

так что выражение

$$\frac{u}{av_0} \frac{dw}{du} = \frac{u - \frac{1}{u}}{u + \frac{1}{u} - 2\cos \alpha}$$

на струе, где  $u$  реально, также реально, а на полуокружности представляет собою количество чисто мнимое, как и должно быть.

Что касается функции, выражающей комплексную скорость,  $\frac{dw}{dz}$ , то она будет попрежнему выражаться формулой (3) со следующими изменениями: если мы желаем исследовать истечение из безгранично расширяющегося сосуда, то надлежит принять в указанной формуле  $n = 1$ . Для сосуда конечной ширины следует принять  $n = 0$ .

### Summary

Formulae are given (1), (2) and (3) for the computation of a twodimensional flow of an incompressible fluid in the neighbourhood of an obstacle in the form of a cylinder, where the flow breaks away forming several dead regions behind the obstacle. Further the reaction forces on the cylinder are determined (formulae (11), (12), (13); it is shown that the Euler paradox is applicable also in the case when the receding undisturbed region will have a finite breadth at the infinity. However in the case of an unsymmetrical body there will exist a lifting force (perpendicular to the direction of the flow far away from the body) in spite of the circulation around the cylinder being zero; this force is expressed by the formula (14),  $F(u)$  being determined from the formula (2). Further the degree of curvature of the flow and of the cylinder in the points of the break away of the flow is determined and formulae are given for an obstacle limited by plane walls. In conclusion a method of solution of the problem of flow from a tank with curved walls is briefly outlined.

## К ТЕОРИИ РАЗРЕЗНОГО КРЫЛА

В работе по теории разрезного крыла<sup>1</sup> было изучено влияние предкрылка на выравнивание скоростей на верхней поверхности крыла и на проистекающее отсюда увеличение предельного угла атаки.

В настоящей заметке изучается влияние предкрылка на смещение критической точки на крыле; это смещение также ведет к увеличению предельного угла атаки, причем подъемная сила не уменьшается.

При помощи конформного отображения можно область течения отобразить на внешнюю часть круглого цилиндра. Предполагая, что хорда предкрылка мала, заменим предкрылок одним вихрем, расположенным в точке  $z=a$  вне цилиндра  $|z|=1$ , изображающего крыло.

Пусть скорость потока в бесконечности равна  $V_\infty$  и образует с осью  $x$  угол  $\theta$ ; пусть циркуляция вокруг цилиндра равна  $\Gamma$  и циркуляция вокруг предкрылка равна  $I$ . Тогда характеристическая функция течения имеет вид:

$$w = V_\infty e^{-\theta i} \left( z + \frac{e^{2\theta i}}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + \frac{I}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z-\bar{a}},$$

где

$$a = \rho e^{i\mu} \text{ и } \bar{a} = \frac{1}{\rho} e^{-i\mu},$$

отсюда

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty e^{-\theta i} \left( 1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{I}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\bar{a}} \right\} \quad (1)$$

Предполагая, что одной из критических точек (точкою схода) является точка  $z=1$ , имеем:

$$0 = V_\infty e^{-\theta i} \left( 1 - e^{2\theta i} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} + \frac{I}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-\bar{a}} \right\}. \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2)  $\Gamma$ , приведем выражение производной характеристической функции к виду:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{z-1}{z} \left\{ V_\infty e^{-\theta i} \left( 1 + \frac{e^{2\theta i}}{z} \right) + iA \frac{z-a\bar{a}}{(z-a)(z-\bar{a})} \right\}, \quad (3)$$

где

$$A = \frac{I(a-\bar{a})}{2\pi(1-a)(1-\bar{a})}. \quad (4)$$

<sup>1</sup> В. В. Голубев. Исследования по теории разрезного крыла. Ч. I. Труды ЦАГИ, вып. 147. 1933.

Отсюда для выражения скорости на поверхности цилиндра получим выражение

$$\frac{dw}{dz} = 4V_{\infty} e^{-(\varphi - \frac{\pi}{2})i} \sin \frac{\varphi}{2} \left[ \cos \left( \theta - \frac{\varphi}{2} \right) + K \frac{\sin \left( \frac{\varphi}{2} - \mu \right)}{r - \cos(\varphi - \mu)} \right], \quad (5)$$

где

$$\frac{A}{2V_{\infty}} = K \text{ и } r = \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right), z = e^{\varphi i}.$$

В случае, если интенсивность вихря  $I$  достаточно велика, на цилиндре получатся четыре критических точки, одной из которых является точка  $z = 1$ ; ей соответствует значение  $\varphi = 0$ .

Для нахождения остальных трех точек надо решить уравнение

$$\cos \left( \theta - \frac{\varphi}{2} \right) [r - \cos(\varphi - \mu)] + K \sin \left( \frac{\varphi}{2} - \mu \right) = 0. \quad (6)$$

Решение этого уравнения можно свести к решению кубического уравнения с неизвестным  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ .

Называя корни этого уравнения через  $\alpha, \beta, \gamma$ , можно свести уравнение (5) к виду:

$$\frac{dw}{dz} = 8V_{\infty} e^{-(\varphi + \frac{\pi}{2})i} \frac{\sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \sin \frac{\varphi - \beta}{2} \sin \frac{\varphi - \gamma}{2}}{r - \cos(\varphi - \mu)}. \quad (7)$$

Можно доказать, что между углами  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\mu$  существует соотношение

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\theta + 2\mu + \pi. \quad (8)$$

Если через  $\alpha$  называть угол, соответствующий смещенной точке разделения струй, то угол

$$2\delta = \alpha - \pi - 2\theta$$

можно назвать смещением критической точки. Точно так же назовем смещениями критических точек, образованных от действия вихря  $I$  углы  $\beta - \mu$  и  $\gamma - \mu$ . При этих обозначениях уравнение (8) выражается следующим образом.

Сумма смещений критических точек под действием добавочного вихря  $I$  равна нулю.

Это свойство обобщается на случай произвольного числа добавочных вихрей. Предполагая, что смещение критической точки разделения потока невелико, можно из у-ния (6) приближенно определить величину  $\delta$ .

Получим:

$$\delta = \frac{K \cos(\theta - \mu)}{r + \cos(2\theta + \mu) + K \sin(\theta - \mu)}. \quad (9)$$

Так как обычно предкрылок помещается вблизи передней кромки, то приближенно можно написать:

$$\delta = \frac{K \cos(\theta - \mu)}{r + \cos(2\theta + \mu)} \quad (9')$$

или, заменяя  $K$  его значением:

$$\delta = -\frac{I}{8\pi V_{\infty}} \cdot \frac{\rho - \frac{1}{\rho}}{r - \cos \mu} \cdot \frac{\cos(\theta - \mu)}{r + \cos(2\theta + \mu)}. \quad (10)$$

Отсюда

$$\alpha = \pi + 2\theta + 2\delta. \quad (11)$$

Из формулы (10) видим, что, так как  $I < 0$  и при обычном расположении предкрылка  $\mu$  близко к  $\pi$  и  $\theta$  мало, то  $\delta < 0$ , т. е. присутствие добавочного вихря уменьшает угол  $\alpha$ , что равносильно кажущемуся уменьшению угла атаки, так как по (11) вместо угла атаки  $\theta$  имеем кажущийся угол атаки  $\theta + \delta < \theta$ .

Из результатов, полученных для разрезного крыла<sup>1</sup>, оказывается, что при этом подъемная сила не уменьшается, но слегка увеличивается сравнительно с подъемной силой, соответствующей углу атаки  $\theta$ .

При небольшой величине добавочного вихря  $I$  критические точки потока, возникающие от этого вихря, будут вне цилиндра, а потому углы  $\beta$  и  $\gamma$  будут мнимые. При этом формула (7) примет вид:

$$\frac{dw}{dz} = 8V_{\infty} e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \frac{\sin^2 \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\nu}{2}}{r - \cos(\varphi - \mu)}, \quad (12)$$

где

$$\nu = \ln \left\{ S + \sqrt{S^2 - 1} \right\} \text{ и } S = \left\{ r + \delta \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \Delta)} \right\} \left\{ 1 + \delta \operatorname{tg}(\theta - \Delta) \right\} \text{ и } \Delta = \mu - \pi.$$

Если положить

$$\frac{\sin^2 \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\nu}{2}}{r - \cos(\varphi - \mu)} = L,$$

то формулу (12) можно написать в виде:

$$\frac{dw}{dz} = 8V_{\infty} e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} L. \quad (13)$$

Так как для обтекания цилиндра без добавочного вихря имеем аналогичную формулу

$$\frac{dw}{dz} = 8V_{\infty} e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_1}{2}, \quad (14)$$

то присутствие добавочного вихря сводится:

1) к изменению положения критической точки разветвления потока ( $\alpha = \alpha_1 + 2\delta$ );

2) к изменению величины, скорости на поверхности цилиндра, благодаря присутствию множителя  $L$  в формуле (13).

Как было указано выше, изменение положения критической точки влечет за собою кажущееся уменьшение угла атаки при небольшом увеличении подъемной силы. Можно показать, что присутствие множителя  $L$  влечет за собой выравнивание скорости на верхней поверхности цилиндра, так что скорость обтекания уменьшается вблизи предкрылка и увеличивается вдали от него. Эффект действия этого выравнивания и был изучен в первой части работы „Исследования на теории разрезного крыла“.

Таким образом увеличение предельного угла атаки происходит за счет двух факторов:

1) не ухудшая характера обтекания, можно увеличить в присутствии предкрылка предельный угол атаки на величину  $(\delta)$ , определяемую по формуле (10);

<sup>1</sup> В. В. Голубев. Исследования по теории разрезного крыла. Ч. 1. Труды ЦАГИ, вып. 147. 1933. Стр. 17.

2) можно еще увеличить предельный угол атаки за счет выравнивания скорости, происходящей от присутствия множителя  $L$ ; расчет соответствующего увеличения указан в „Исследованиях по теории разрезного крыла“.

Необходимо отметить, что увеличение предельного угла атаки на  $(\delta)$  совершенно не зависит от характера обтекания и структуры пограничного слоя.

Все предыдущие соображения целиком переносятся на случай крыла любой формы, причем величина интенсивности добавочного вихря  $I$ , заменяющего предкрылок, определяется методом, указанным в „Исследованиях по теории разрезного крыла“.

### Summary

The report discusses the effect of the displacement of the critical transition point due to the action of the slot; approximate formulae are given for the determination of the displacement in the case of a cylinder placed in an air stream; the variation of the lifting force on the cylinder resulting from the action of the slot and the displacement of the critical point is studied. It is shown that the action of the slot results in an apparent decrease of the angle of incidence.



## ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ В СЖИМАЕМОМ ГАЗЕ<sup>1</sup>

Вопрос о теплопередаче при больших скоростях в настоящее время стал чрезвычайно актуальным и в теплотехнике и в скоростной авиации; в последней эта проблема встречается при расчете поверхностного крылового радиатора. Существующие работы по теплопередаче от стенок к газам отчасти относятся только к малым скоростям (Рейнольдс, Прандтль и др.), что же касается течений с большими скоростями, то одни (Буземан, Франкль) рассматривают только ламинарный режим, другие (Крокко) пренебрегают ламинарным подслоем в турбулентном слое, третьи (Гухман, Широков) исходят из сравнительно грубых гидравлических соображений.

В настоящем сообщении вопрос ставится с точки зрения современной теории турбулентности.

В дальнейшем мы рассмотрим случай плоскопараллельного потока, а в частности пограничный слой пластинки в потоке, параллельном к ней. Изложим вначале еще несколько в основном известных результатов.

Мы разложим мгновенные компоненты скорости  $u$ ,  $v$  и величины состояния газа  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  на их средние значения  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ , ... и добавочные значения  $u'$ ,  $v'$ , ... Предположим, что турбулентные колебания плотности  $\rho'$  малы по сравнению со средней плотностью  $\bar{\rho}$ . Тогда имеем следующие уравнения для турбулентного напряжения трения  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yy}$  и теплопередачи в единицу времени через единицу площади  $q_x$ ,  $q_y$ :

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= \bar{\rho} \overline{u'^2} \\ \tau_{xy} &= \bar{\rho} \overline{u'v'} \\ \tau_{yy} &= \bar{\rho} \overline{v'^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} q_x &= c_p \bar{\rho} \overline{u'T'} \\ q_y &= c_p \bar{\rho} \overline{v'T'} \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где черта означает осреднение во времени и уравнения осредненного движения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho} \frac{d\bar{u}}{dt} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \bar{\rho} \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{d}{dt} \left( Jc_p \bar{T} + \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2} + \frac{\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2}{2} \right) &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \tau_{xx} + \bar{v} \tau_{xy}) - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} \tau_{xy} + \bar{v} \tau_{yy}) - J \left[ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

<sup>1</sup> Доложено 2 апреля 1935 г.

Силами вязкости мы здесь пренебрегаем по сравнению с турбулентным трением.

Перейдем теперь к случаю пластинки. В этом случае  $\bar{p}$  имеет постоянное значение. Выберем пластинку за ось  $x$ . Тогда мы можем пренебречь всеми производными по  $x$  по сравнению с производными по  $y$  и  $z$  по сравнению с  $u$ . Наконец, предположим, что средняя энергия турбулентных добавочных скоростей имеет постоянное значение. Тогда у-ния (3) и (5) принимают вид:

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (3')$$

$$\bar{\rho} \frac{d}{dt} \left( J c_p T + \frac{\bar{u}^2}{2} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} \tau_{xy}) - J \frac{\partial q_y}{\partial y}. \quad (5')$$

Для определения  $\tau_{xy}$  и  $q_y$  мы исходим из следующих общепринятых гипотез.

Добавочная скорость  $u'$  возникла вследствие того, что в точку ( $x, y$ ) попала масса жидкости из точки с ординатой  $y + l_y$ , где она приняла среднюю скорость, имеющуюся в этой точке, так что

$$u' = l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (6)$$

Аналогично получаем:

$$T' = l_y \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (7)$$

Подставляя эти выражения в (1) и (2), получим:

$$\tau_{xy} = \overline{\rho v' l_y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (8)$$

$$q_y = c_p \overline{\rho v' l_y} \frac{\partial T}{\partial y} = \Lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (9)$$

где  $A$  — коэффициент турбулентной псевдовязкости,  $\Lambda$  — коэффициент турбулентной теплопроводности. Из уравнений

$$A = \overline{\rho v' l_y}$$

$$\Lambda = c_p \overline{\rho v' l_y}$$

непосредственно следует известное уравнение Прандтля

$$\Lambda = c_p A. \quad (10)$$

Подставив (8) и (9) в ур-ния (3') и (5') и опустив знаки осреднения, так как в дальнейшем мы будем иметь дело только со средними величинами, получим:

$$\rho \frac{du}{dt} = - \frac{\partial}{\partial y} \left( A \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (11)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left( J c_p T + \frac{u^2}{2} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left[ A \frac{\partial}{\partial y} \left( J c_p T + \frac{u^2}{2} \right) \right]. \quad (12)$$

Таким образом, скорость и полная энергия  $Jc_p T + \frac{u^2}{2}$  удовлетворяют одному и тому же линейному дифференциальному уравнению. Поэтому мы можем удовлетворить всем краевым условиям, полагая

$$Jc_p T + \frac{u^2}{2} = au + b, \quad (13)$$

где  $a$  и  $b$  не зависят от  $y$ . Это соотношение было впервые выведено Крокко.

Закончив, таким образом, критическое изложение ряда в основном известных положений, мы перейдем непосредственно к нашей задаче. Из всего предыдущего нам требуются только ур-ния (10) и (13).

Введем следующие обозначения:

$e = Jc_p T + \frac{u^2}{2}$  — полная энергия,  $u$ ,  $T$ ,  $\bar{e}$ , ... — значения  $u$ ,  $T$ ,  $e$ , ... в свободном потоке,  $u_1$ ,  $T_1$ ,  $e_1$  значения  $u$ ,  $T$ ,  $e$ , ... на стыке ламинарного подслоя и турбулентного слоя,  $T_*$ ,  $\rho_*$ ,  $\mu_*$  — значения  $T$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  непосредственно у стенки.

Тогда ур-ние (13) можно переписать в виде

$$e - e_1 = \frac{\bar{e} - e_1}{u - u_1} (u - u_1). \quad (14)$$

В ламинарном подслое касательное напряжение  $\tau_{xy}$  и теплопередача  $q_y$  определяются формулами

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$q_y = \lambda \frac{\partial T}{\partial y},$$

где  $\mu$  — коэффициент вязкости и  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности. Из физического значения  $\tau_{xy}$  и  $q_y$  вытекает, что эти величины должны быть непрерывны во всей области течения. (Схематическое представление о вполне ламинарном и вполне турбулентном подслоях имеет поэтому как следствие появление разрыва  $\frac{\partial u}{\partial y}$  и  $\frac{\partial T}{\partial y}$  при переходе из ламинарного в турбулентный слой, так как  $\mu$  значительно меньше  $A$  и  $\lambda$  меньше  $\Delta$ ).

В качестве первого приближения предположим линейное распределение скорости и температуры в ламинарном подслое. Тогда имеем:

$$u_1 = \frac{\tau}{\mu_*} h, \quad (15)$$

$$T_1 - T_* = \frac{q}{\lambda_*} h, \quad (16)$$

где  $\tau$  и  $q$  — значения  $\tau_{xy}$  и  $q_y$  непосредственно у стенки и  $h$  — толщина ламинарного подслоя. Тогда из гипотезы о непрерывности  $\tau_{xy}$  и  $q_y$  следует:

$$A_1 \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_1 = \tau, \quad (17)$$

$$\Delta_1 \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_1 = q. \quad (18)$$

Из ур-ний (10), (17) и (18) получаем соотношение

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_1 = \frac{q}{c_p \tau} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_1. \quad (19)$$

Дифференцируем теперь ур-ние (14) по  $y$  для  $y=h$ . Это дает:

$$\left. \frac{\partial e}{\partial y} \right|_1 = \frac{\bar{e} - e_1}{\bar{u} - u_1} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_1. \quad (20)$$

Подставляя сюда значение  $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_1$  из (18), получаем:

$$u_1 + \frac{Jq}{\tau} = \frac{\bar{e} - e_1}{\bar{u} - u_1}. \quad (21)$$

Подставим, наконец, сюда еще значение  $T_1$ , полученное из (15) и (16)

$$T_1 = T_* + \frac{q}{\lambda_*} \frac{\nu_*}{\tau} u_1, \quad (22)$$

тогда получаем следующее соотношение между  $q$ ,  $\tau$ ,  $\bar{u}$ ,  $T$ ,  $T_*$  и  $u_1$ :

$$u_1 + \frac{Jq}{\tau} = \frac{Jc_p \left( \bar{T} - T_* - \frac{q}{\lambda_*} \frac{\nu_*}{\tau} u_1 \right) + \frac{\bar{u}^2}{2} - \frac{u_1^2}{2}}{\bar{u} - u_1}.$$

Решая это уравнение по  $q$ , получим:

$$q = \tau \frac{c_p (\bar{T} - T_*) + \frac{(\bar{u} - u_1)^2}{2J}}{\bar{u} + u_1 (Pr - 1)} \quad (23)$$

или

$$q = c_p \frac{\nu_*}{2} \bar{\rho}_* \bar{u} \frac{\bar{T} - T_* + \frac{(\bar{u} - u_1)^2}{2Jc_p}}{1 + (Pr - 1) \frac{u_1}{\bar{u}}}, \quad (24)$$

где  $Pr = \frac{c_p \nu_*}{\lambda} (=0,8 \text{ для двухатомных газов})^1$ .

Обозначение  $Pr$  — это начальные буквы фамилии Прандтль.

Таким образом можно найти теплопередачу через единицу площади стенки в единицу времени, когда известны температура в свободном потоке и около стенки, скорость потока, коэффициент трения и плотность около стенки.

Что же касается скорости  $u_1$ , которое встречается на правой стороне, то она определяется следующим образом:

В несжимаемой жидкости согласно гипотезе Кармана имеем:

$$u_1 = s \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad (25)$$

где  $s$  — абсолютная константа. По опытам Никурадзе она равняется:

$$s = 11,6. \quad (26)$$

<sup>1</sup> Во всех наших формулах  $c_p$  означает теплоемкость единицы массы при постоянном давлении. Если, как это принято в технике, через  $c_p$  обозначить теплоемкость единицы веса, тогда надо  $c_p$  заменить через  $gc_p$ .

В сжимаемом газе аналогично будет:

$$u_1 = s \sqrt{\frac{\tau}{\rho_*}}, \quad (25')$$

где  $s$ , вообще говоря, может зависеть еще от безразмерных параметров<sup>1</sup>

$$\frac{\tau}{p} \text{ и } \frac{q \nu_*}{\lambda_* T_* \sqrt{\tau \rho_*}}.$$

Но так как  $s$  входит только в члены, сравнительно малые при не слишком больших (в частности: дозвуковых) скоростях, мы можем в первом приближении применить значение  $s = 11,6$ . Из (25') следует:

$$\frac{u_1}{u} = s \sqrt{\frac{\psi_*}{2}}, \quad (27)$$

так что уравнение (29) можно также написать в виде:

$$q = c_p \frac{\psi_*}{2} \rho_* \bar{u} \frac{\bar{T} - T_* + \left(1 - s \sqrt{\frac{\psi_*}{2}}\right)^2 \frac{\bar{u}^2}{2Jc_p}}{1 + (Pr - 1)s \sqrt{\frac{\psi_*}{2}}}. \quad (28)$$

### Summary

In the present article the Reynold's law of heat transfer from a wall to a turbulent flow is extended to cover the case of flow of a compressible gas at high speeds. The analysis is based on the modern theory of a turbulent boundary layer with the account of a laminar sublayer. The investigation is carried for the case of a plate placed in a parallel stream. The results are obtained independent on the velocity distribution in the turbulent boundary layer. The heat transfer  $q$  in a unit of time depends: on the frictional coefficient  $\psi = \frac{2\tau}{\rho u^2}$ , the temperature in a free stream  $\bar{T}$ , the temperature at the plate  $T_*$ , the velocity  $u$  and the density  $\rho$  of the free stream, the velocity at the wall of the laminar sublayer and the basic turbulent layer  $u_1$  and the Prandtl's number for the given gas  $Pr = \frac{c_p \nu}{\lambda}$

$$q = c_p \frac{\psi}{2} \rho \bar{u} \frac{\bar{T} - T_* + \frac{(\bar{u} - u_1)^2}{2Jc_p}}{1 + (Pr - 1) \frac{u_1}{u}}.$$

<sup>1</sup> См. стр. 23 настоящего сборника.

## ТРЕНИЕ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ В СЖИМАЕМОМ ГАЗЕ<sup>1</sup>

Лобовое сопротивление крыла состоит из двух частей: из сопротивления пластинки той же хорды и из „сопротивления формы“, т. е. избытка над сопротивлением пластинки.

Влияние числа Бэрстоу на эти два элемента лобового сопротивления зависит от разных причин: коэффициент сопротивления формы меняется, главным образом, в зависимости от изменения распределения скоростей около профиля, коэффициент сопротивления пластинки, напротив, зависит только от изменения коэффициента трения.

В данной работе мы исследуем влияние числа Бэрстоу на коэффициент трения, а также влияние нагревания стенки на него, имея в виду случай крылового радиатора. Мы ограничиваемся случаем турбулентного пограничного слоя пластинки, омываемой потоком постоянной скорости при нулевом угле атаки.

Для этой цели мы обобщаем новую теорию турбулентного пограничного слоя, так называемую теорию пути смешения (Mischungsweg).

Прежде чем написать исходные дифференциальные уравнения, мы перейдем к безразмерным величинам путем введения масштабов для длин, скоростей и величин состояния газа.

Безразмерные скорости и величины состояния газа как функции безразмерных координат тогда будут зависеть от параметров, которые являются безразмерными комбинациями масштабов, краевых данных у пластинки и физических констант газа.

Как краевые данные можно брать напряжение трения  $\tau$  у пластинки, теплопередачу в единицу времени через единицу площади  $q$  там же, и величины состояния газа у пластинки  $p$ ,  $\rho_*$  и  $T_*$ .

Давление  $p$ , как обыкновенно в теории пограничного слоя, полагаем постоянным. Введем теперь  $\rho_*$  и  $T_*$  как масштабы для  $\rho$  и  $T$ . Как масштаб скоростей берём „скорость трения“,

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_*}}, \quad (1)$$

а как масштаб длин величину

$$\frac{v_*}{\rho_* v_*} = \frac{\mu_*}{\sqrt{\rho_* \tau}}, \quad (2)$$

где  $\mu_*$  — значение коэффициента вязкости  $\mu$  у пластинки.

При введении таких масштабов параметры решения могут теперь быть только безразмерными комбинациями краевых данных и физических констант.

Вместе с Карманом мы предположим, что влияют только краевые условия в ближайшей точке стенки.

<sup>1</sup> Доложено 8 октября 1934, печатается с некоторыми изменениями и дополнениями.

При отсутствии сжимаемости и теплопередачи такие комбинации не существуют, вследствие чего, как известно, получается универсальное распределение скоростей, не зависящее ни от каких параметров.

Поэтому впоследствии мы будем называть эти масштабы „универсальными“.

Единственными независимыми такими параметрами являются:

$$\gamma = \frac{\tau}{p} \quad (3)$$

$$\vartheta = \frac{q_{*}^u}{\lambda_{*} T_{*} \sqrt{\rho_{*} \tau}}, \quad (4)$$

а также величины, зависящие только от физических констант.

$$k = \frac{c_p}{c_v}, \quad (5)$$

$$Pr = \frac{c_p \nu}{\lambda}. \quad (6)$$

В двухатомных газах мы имеем  $k = 1,4$ , а число Прандтля  $Pr$  равняется  $Pr = 0,8$ .

(Здесь  $c_p, c_v$  — теплоемкость единицы массы при постоянном давлении и объеме,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности газа,  $\lambda_{*}$  — его значение у стенки).

Исследуем теперь турбулентный пограничный слой пластинки.

За ось  $x$  берем пластинку, переменную скорость в пограничном слое обозначим через  $u$ ; впрочем, все обозначения остаются теми же, как в предыдущей статье („Теплопередача“).

Предположим теперь, что в сжимаемом газе остается в силе основное дифференциальное уравнение теории турбулентности Кармана:

$$x^2 \rho \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2} = \tau, \quad (7)$$

где  $x$  — абсолютная константа, равная 0,4.

Здесь  $\tau$  означает напряжение трения в расстоянии  $y$  от пластинки.

Однако, когда координата  $x$  (т. е. расстояние от передней кромки пластинки) достаточно велико, мы можем пренебречь силами инерции. Отсюда и из постоянства давления  $p$  следует, что  $\tau$  не зависит от  $y$ .

Перейдем теперь к универсальным масштабам и введем безразмерные величины:

$$\eta = \frac{y \sqrt{\rho_{*} \tau}}{\nu_{*}}; \quad (8)$$

$$\varphi = \frac{u}{v_{*}}; \quad (9)$$

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_{*}} = \frac{T_{*}}{T}. \quad (10)$$

Тогда уравнение (7) принимает вид:

$$x^2 \sigma = \frac{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\right)^2}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^4}. \quad (11)$$

Для того чтобы получить дифференциальное уравнение для  $\varphi$ , остается только выразить  $\sigma$  через  $\varphi$ . Это удается при помощи уравнений (14) и (21) предыдущей статьи. Из этих уравнений следует уравнение, аналогичное уравнению (23) предыдущей статьи:

$$q = \tau \frac{c_p (T - T_*) + \frac{(u - u_1)^2}{2Jc_p}}{u + u_1 (Pr - 1)},$$

которое после введения универсальных масштабов приводится к виду:

$$\frac{1}{\sigma} = 1 + \frac{\vartheta}{Pr} \left[ \varphi + s(Pr - 1) \right] - \frac{k - 1}{2k} \gamma (\varphi - s)^2, \quad (12)$$

где  $s = \frac{u_1}{v_*}$ , согласно вышеприведенным соображениям, может зависеть только от  $\gamma$ ,  $\vartheta$ ,  $k$  и  $Pr$ .

Подставляя выражение (12) в (11), мы получаем дифференциальное уравнение для  $\varphi$ , которое легко решается в элементарных функциях.

Для определения краевых условий мы исходим из гипотезы линейного распределения  $u$  в ламинарном подслое. Это дает

$$u = \frac{\tau}{\mu_*} y$$

или

$$\varphi = \eta \quad (13)$$

и, следовательно,  $\varphi_1 = \varphi(s) = s$ .

Что касается значения  $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$  в турбулентном слое для  $y = s$  (т. е. на границе ламинарного подслоя), то имеем:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right|_{\eta = s} = f, \quad (14)$$

где  $f$  может, как  $s$ , зависеть только от  $\gamma$ ,  $\vartheta$ ,  $k$  и  $Pr$ . В несжимаемой жидкости при отсутствии теплопередачи  $f$  имеет постоянное значение

$$f = 0,289. \quad (15)$$

Наша задача заключается теперь в том, чтобы найти коэффициент трения  $\psi_*$  (см. предыдущую статью) как функцию от числа Бэрстоу, отношения температур в свободном потоке и у стенки, а также от числа Рейнольдса данной точки пластинки, точнее:

$$\psi_* = \psi_* \left( \xi, Ba_*, \frac{T_*}{T} \right),$$

$$\xi = \frac{\rho_* \bar{u} x}{\mu_*}, \quad (16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Ba_* &= \frac{\bar{u}}{a_*} \\ a_* &= \sqrt{(k - 1) Jc_p T_*} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

( $= a_*$  — скорость звука у стенки).

Вместо  $\frac{T_*}{\bar{T}}$  в дальнейшем целесообразно ввести параметр  $\omega$ , определяемый уравнением:

$$\frac{T_*}{\bar{T}} = \frac{k-1}{2} Ba_*^2 \omega + 1. \quad (18)$$

В дальнейшем мы предположим, что  $\omega$  имеет порядок единицы: физический смысл этой гипотезы заключается в том, что  $T_* - \bar{T}$  имеет такой же порядок, как разность температур между стенкой и потоком, возникающая вследствие трения без теплоотдачи. Для крыловых радиаторов при больших скоростях эту гипотезу можно считать выполненной.

Теперь нужно определить  $\psi_*$  в виде:

$$\psi_* = \psi_*(\xi, Ba_*, \omega).$$

Для достижения этой цели надо прежде всего параметры в законе распределения скорости  $\gamma$  и  $\vartheta$  выразить через  $\psi_*$ ,  $Ba_*$  и  $\omega$ .

Для  $\gamma$  получаем непосредственно

$$\gamma = \frac{k}{2} \psi_* Ba_*^2, \quad (19)$$

а для  $\vartheta$  из уравнения (28) предыдущей статьи:

$$\vartheta = \frac{Pr \sqrt{\frac{\psi_*}{2}}}{1 + (Pr-1)s \sqrt{\frac{\psi_*}{2}}} \frac{k-1}{2} Ba_*^2 \left[ \omega - \left( 1 - s \sqrt{\frac{\psi_*}{2}} \right)^2 \right]. \quad (20)$$

Подставим теперь (19) и (20) в решение уравнений (11) и (12) при краевых условиях (13) и (14). Если это решение разложить в ряд Тейлора по степеням  $Ba_*^2$  и оставить только нулевые и первые степени, то получается:

$$\eta = s + \frac{e^{\chi(\vartheta-s)} - 1}{\chi f} - \frac{k-1}{4\chi^2 f} Ba_*^2 \psi_* \left\{ e^{\chi(\vartheta-1)} \left[ \frac{\chi}{2} (m - \vartheta)^2 + n \right] - r \right\}, \quad (21)$$

где  $m$ ,  $n$  и  $r$  зависят только от  $\omega$ ,  $Pr$ ,  $\psi_*$ ,  $k$  и  $s$ .

В случае  $Ba_* = 0$ , мы получаем известное логарифмическое распределение скоростей.

Для решения нашей задачи требуется только еще подставить это распределение скоростей в известное интегральное условие Кармана:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\bar{\eta}} \rho u (u - \bar{u}) dy = -\tau$$

или в абсолютных масштабах

$$d\bar{\xi} = -\frac{2}{\psi_*} d \left\{ \int_0^{\bar{\eta}} \sigma \vartheta (\vartheta - \bar{\vartheta}) d\eta \right\}, \quad (22)$$

где

$$\bar{\eta} = \frac{\delta \sqrt{\rho_* \tau}}{\mu_*}.$$

Если выполнить интегрирование уравнения (22) в предположении, что  $f$  и  $s$  сохраняют постоянные значения  $s=11,6$  и  $f=0,289$  и обозначить

$$\kappa \sqrt{\frac{2}{\psi}} = z,$$

то получим:

$$\begin{aligned} \xi = P_1(z) + e^z P_2(z) - B_{a*}^2 \left\{ S_0(\omega) + S_1(\omega)z + S_2(\omega) \ln(z-c) + C_1 \ln z + \right. \\ \left. + \frac{C_2 + S_3(\omega)z + S_4(\omega)z^2}{z(z-c)^2} + e^z \left[ S_5(\omega) + S_6(\omega)z + S_7(\omega)z^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{C_3 + S_8(\omega)z + S_9(\omega)z^2}{z(z-c)^2} \right] + C_4 E_i(z) + S_{10}(\omega) E_i(z-c) \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned} P_1(z) &= 9542 - 3134z + 246z^2 \\ P_2(z) &= 1,31(z^2 - 4z + 6) \\ S_0(\omega) &= 86217 - 2676(\omega - 1) + 168(\omega - 1)^2 \\ S_1(\omega) &= 129,7(\omega - 1) - 38,0(\omega - 1)^2 \\ S_2(\omega) &= -[25353 - 4567(\omega - 1) + 173(\omega - 1)^2] \\ S_3(\omega) &= 373151 + 4380(\omega - 1) - 162(\omega - 1)^2 \\ S_4(\omega) &= -[175174 + 6211(\omega - 1) - 222(\omega - 1)^2] \\ S_5(\omega) &= -1,011 + 3,669(\omega - 1) - 0,055(\omega - 1)^2 \\ S_6(\omega) &= 1,003 - 0,965(\omega - 1) + 0,105(\omega - 1)^2 \\ S_7(\omega) &= 0,131 + 0,131(\omega - 1) - 0,049(\omega - 1)^2 \\ S_8(\omega) &= 86,187 - 1,723(\omega - 1) - 0,048(\omega - 1)^2 \\ S_9(\omega) &= -[55,959 - 0,502(\omega - 1) - 0,097(\omega - 1)^2] \\ S_{10}(\omega) &= -[144,71 + 3,26(\omega - 1) + 0,51(\omega - 1)^2] \\ C &= 0,928 \\ C_1 &= 18433 \\ C_2 &= 186231 \\ C_3 &= -68,416 \\ C_4 &= 184,94 \end{aligned}$$

$$E_i(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^z dz}{z}$$

Таким образом, имеем уравнение вида  $\xi = \xi(\psi_*, Ba_*, \omega)$  и наша основная задача решена.

Отметим только еще, что легко найти также зависимость числа Рейнольдса.

$$Re_\delta = \frac{\rho_* \bar{u} \delta}{\mu_*} \text{ от } \psi_*, Ba_* \text{ и } \omega.$$

## Summary

In the present article the Prandtl-Kármán theory of turbulent friction, the so-called „Mischungsweg“ theory is extended to cover the case of a high speed motion of a compressible gas with a heat transfer from a wall. A correction to the Kármán friction law is derived depending on the Bairstow number (the compressibility effect) and on the ratio of absolute temperatures in the free stream and at the wall. The analysis is based on the heat transfer law developed in a preceeding article by F. Frankl.

К ВОПРОСУ О ПОЛОЖЕНИИ ЦЕНТРА ЖЕСТКОСТИ<sup>1</sup>

1. В последнем издании „Теории упругости“ проф. С. П. Тимошенко (цитируется здесь как [1]) рассмотрен вопрос о положении центра жесткости полукруга (1). Для абсциссы центра жесткости С. П. Тимошенко получает формулу, с которой мы не можем согласиться ввиду следующих соображений. С. П. Тимошенко определяет абсциссу центра жесткости, рассматривая момент касательных напряжений, которые получаются из решения задачи изгиба для круга. Функция напряжений для этой задачи отыскивается, ввиду симметрии окружности относительно вертикальной оси, при значении константы  $C$  в правой части уравнения изгиба, равном нулю (см. [1], стр. 317—318, в частности формулу [167]), что, разумеется, вполне правильно. Однако для полукруга то значение константы  $C$ , которое дает изгиб, не сопровождаемый закручиванием, уже не равно нулю, а должно быть определено из условия Л. С. Лейбензона [2]

$$C + \frac{\sigma}{1 + \sigma} y_0 = 0, \quad (1)$$

где  $y_0$  — координата центра тяжести сечения. Только при этом условии может быть использована формула Дэнкана-Лейбензона [3]

$$\bar{y} = - \frac{\iint (xY_z - yX_z) dx dy}{Q}, \quad (2)$$

которую применяет С. П. Тимошенко для определения абсциссы  $\bar{y}$  центра жесткости. Если же  $C$  задано произвольно, то для абсциссы центра жесткости должна быть использована формула, данная нами (4)

$$\bar{y} = - \frac{T}{2J} \left[ C + \frac{\sigma}{1 + \sigma} y_0 \right] - \frac{\iint (xY_z - yX_z) dx dy}{Q}, \quad (3)$$

здесь  $T$  [см<sup>4</sup>] — величина, которая может быть названа геометрической жесткостью кручения ( $\mu T$  есть жесткость на кручение в обычном смысле),  $J$  — момент инерции сечения стержня относительно горизонтальной оси симметрии. При  $C = 0$ , из (3) получаем:

$$\bar{y} = - \frac{T}{2J} \frac{\sigma}{1 + \sigma} y_0 - \frac{\iint (xY_z - yX_z) dx dy}{Q}. \quad (4)$$

<sup>1</sup> Доложено 8 марта 1935 г.

Первый член этой формулы представляет собой поправку, которую следует ввести в формулу С. П. Тимошенко.

2. Формула для  $\bar{y}$ , полученная С. П. Тимошенко, имеет в наших обозначениях следующий вид<sup>1</sup>:

$$\bar{y} = \frac{8}{15\pi} \frac{3+4\sigma}{1+\sigma}. \quad (5)$$

Так как для полукруга

$$y_0 = \frac{4}{3\pi}$$

$$J = \frac{\pi}{8}$$

$$T = 0,296 \text{ (см. [1], стр. 279),}$$

то исправленная формула (4) такова:

$$\bar{y} = \frac{8}{15\pi} \frac{3+4\sigma}{1+\sigma} - 0,296 \frac{16\sigma}{3\pi^2(1+\sigma)}. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) совпадают при  $\sigma = 0$  и расходятся при увеличивающихся  $\sigma$ .

На фиг. 1 дано их сравнение. Чтобы обследовать значение поправки в других случаях, мы вычислили по методу С. П. Тимошенко значение  $\bar{y}$  для половины эллипса<sup>2</sup>

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1.$$

Оно дается формулой

$$\bar{y} = \frac{8}{15\pi} \left[ \frac{(10a^2 + 2) + \sigma(10a^2 + 6)}{(1 + \sigma)(3a^2 + 1)} \right], \quad (7)$$

переходящей при  $a=1$  в формулу (5).

Так как известно, что влияние  $\sigma$  на положение центра жесткости особенно заметно в тонких профилях, мы рассмотрели предельный случай  $a=0$ . В этом случае из (7) получается.

$$\bar{y} = \frac{16}{15\pi} \frac{1+3\sigma}{1+\sigma}. \quad (8)$$

Для вычисления нашей поправки мы использовали найденное Файлоном [5] значение  $T$  для половины эллипса

$$\frac{x^2}{c^2 sh^2 \alpha} + \frac{y^2}{c^2 ch^2 \alpha} = 1,$$

даваемое формулой

$$T = \frac{c^4}{16} \left[ \frac{\pi}{2} sh 4\alpha th^2 2\alpha - 2048\alpha^4 (ch^2 \alpha + 1)^2 \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2n+1)} \frac{th \frac{(2n+1)\pi^2}{4\alpha}}{[\pi^2(2n+1)^2 + \alpha^2]}.$$

<sup>1</sup> Радиус круга принят равным единице.

<sup>2</sup> Вычисление встречающихся в дальнейшем интегралов было выполнено А. И. Пожаростинным, которому автор выражает благодарность.

Имея в виду, что для этого случая

$$J = \frac{\pi c^4 \alpha \operatorname{sh}^3 \alpha}{8},$$

без труда находим, что

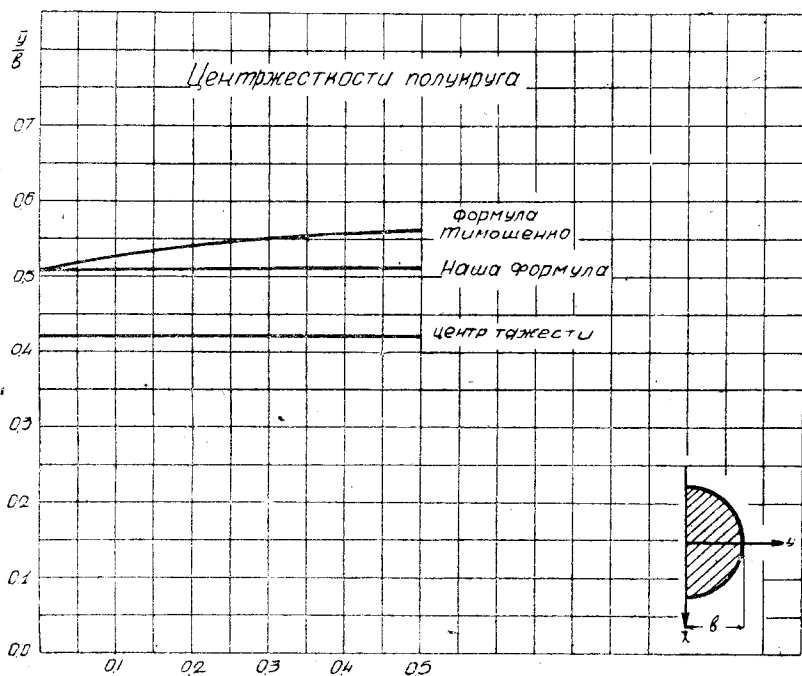
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{T}{J} = 4.$$

Замечая еще, что

$$y_0 = \frac{4}{3\pi},$$

приходим к такому виду исправленной формулы (4) при  $\alpha \rightarrow 0$

$$\bar{y} = \frac{16}{15\pi} \frac{1+3\sigma}{1+\sigma} - \frac{8}{3\pi} \frac{\sigma}{1+\sigma}. \quad (9)$$



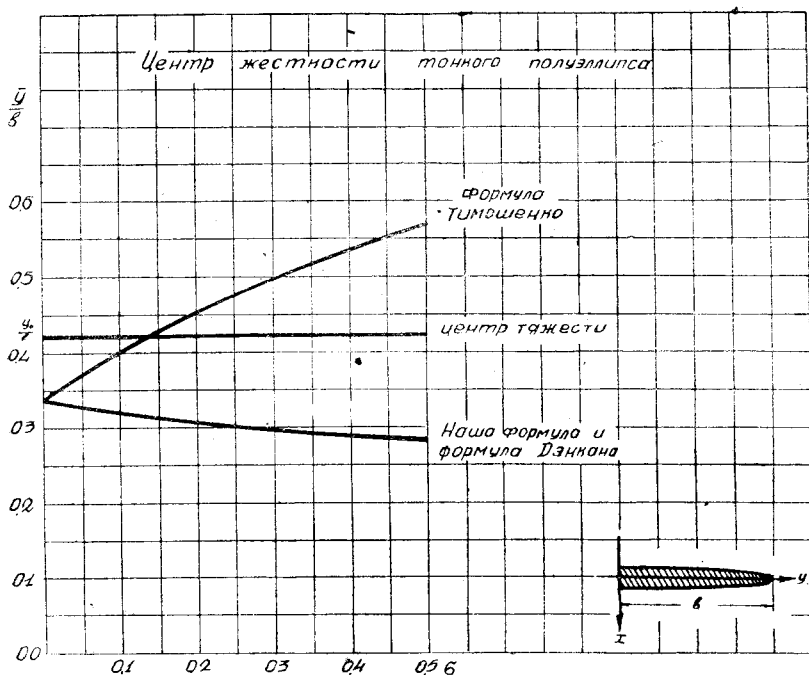
Фиг. 1

Как известно, для тонких симметричных профилей Дэнканом [6] получена формула для  $\bar{y} - y_0$ .

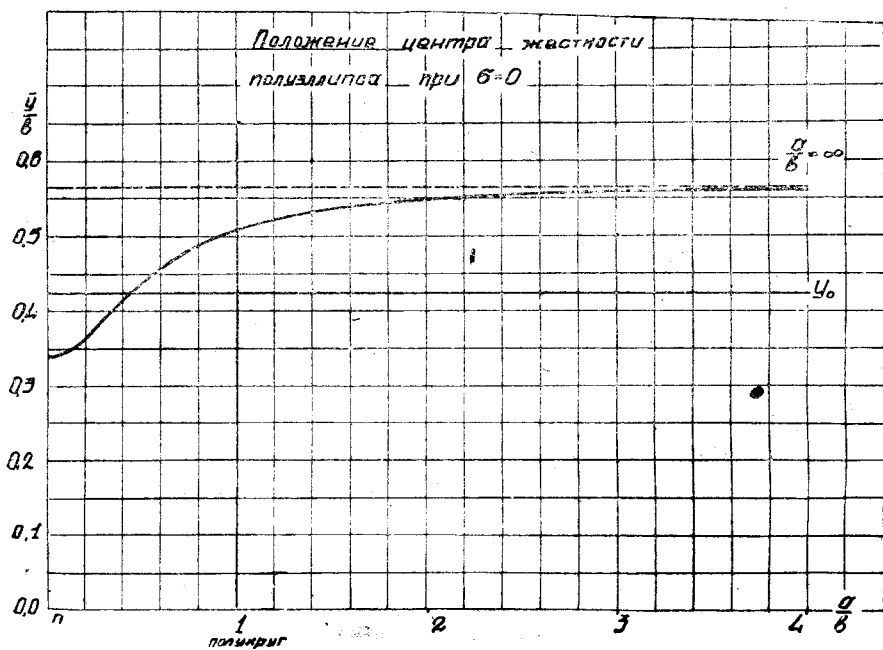
Эта формула в нашем случае дает

$$\bar{y} - y_0 = -\frac{4}{15\pi} \left( \frac{1+3\sigma}{1+\sigma} \right),$$

что совпадает с (9), если подставить в нее  $y_0 = \frac{4}{3\pi}$ . Сравнение значений  $\bar{y}$ , даваемых формулами (8) и (9), сделано на фиг. 2. В этом случае поправка оказывается весьма существенной; абсцисса  $\bar{y}$ , вычисленная по формуле (8) для  $\sigma > 0,14$  больше абсциссы  $y_0$  центра тяжести, в то время как на самом деле абсцисса центра жесткости для тонких полуэллиптических сечений всегда меньше абсциссы центра тяжести. На фиг. 3 показано изменение абсциссы центра жесткости при различных  $\alpha$  и  $\sigma = 0$ .



Фиг. 2.



Фиг. 3.

## Summary

1. In the last edition of the „Theory of Elasticity“ by prof. S. Timoshenko (ref. 1) the problem of determination of the flexural centre position of a semicircle is considered [1]. In this treatise the abscissa of the flexural centre is determined by prof. S. Timoshenko by a formula which we cannot accept for the following reasons. Prof. S. Timoshenko determines the flexural centre abscissa from the analysis of the moment of tangential stresses, which are obtained from the solution of the problem of flexure for a circle. In this solution the stress function is determined owing to the symmetry of circumference about the vertical axis, with the value of the constant  $C$  in the right part of the stress function equation being zero [ref. 1, pp. 317—318, in particular formula (167)], which obviously is quite correct. But for a semicircle the value of the constant  $C$ , which is obtained in the case of a pure flexure without torsion, is no more zero and must be determined from the condition imposed by L. Leibenson [2]

$$C + \frac{\sigma}{1 + \sigma} y_0 = 0 \quad (1)$$

where  $y_0$  is the coordinate of the c. g. of the section. In this case only the Duncan-Leibenson formula [3]

$$\bar{y} = - \frac{\iint (xY_z - yX_z) dx dy}{Q} \quad (2)$$

may be used, which S. Timoshenko uses for the determination of the flexural centre abscissa  $\bar{y}$ . But if the value  $C$  is taken arbitrarily, the flexural centre abscissa must be determined from our formula [4]

$$\bar{y} = - \frac{T}{2J} \left[ C + \frac{\sigma}{1 + \sigma} y_0 \right] \frac{\iint (xY_z - yX_z) dx dy}{Q} \quad (3)$$

where  $T [cm^4]$  is a value, which may be defined as the geometrical torsional stiffness ( $\mu T$  is the torsional stiffness in a usual sense) and  $J$ —the moment of inertia of the beam section about the horizontal axis of symmetry. At  $C=0$  from the formula (3) we obtain

$$\bar{y} = - \frac{T}{2J} \frac{\sigma}{1 + \sigma} y_0 - \frac{\iint (xY_z - yX_z) dx dy}{Q} \quad (4)$$

The first term of this formula represents the correction, which should be introduced in the formula given by S. Timoshenko.

2. The formula expressing  $\bar{y}$  given by S. Timoshenko in our definition is reduced to the following form<sup>1</sup>

$$\bar{y} = \frac{8}{15\pi} \frac{3 + 4\sigma}{1 + \sigma} \quad (5)$$

As for a semicircle

$$y_0 = \frac{4}{3\pi}$$

$$J = \frac{\pi}{8}$$

$$T = 0,296 \quad (\text{see ref. [1] p. 279})$$

<sup>1</sup> The radius of the circle is assumed to be equal to a unity.

then the corrected formula (4) will be:

$$\bar{y} = \frac{8}{15\pi} \frac{1+\sigma}{3+4\sigma} - 0,296 \frac{16\sigma}{3\pi^2(1+\sigma)} \quad (6)$$

At  $\sigma=0$  the formula (5) and (6) coincide and with the increase of  $\sigma$  they become different.

On fig. 1 and fig. 2 a comparative diagram of these two formulae for a semicircle and a semiellipse is given in order to investigate the correction for other cases the value of  $\bar{y}$ . For a semiellipse the correction is shown to be very important.

### Цитированная литература

1. С. П. Тимошенко. Теория упругости, М.—Л. 1934. Стр. 331.
2. Л. С. Лейбензон. О центре изгиба (жесткости). Технические заметки ЦАГИ, № 45, 1935. Стр. 54.
3. W. C. Дипсан. Torsion and Flexure of Cylinders and Tubes. R.-M. № 1444, p. 64. Л. С. Лейбензон, loc. cit. (2).
4. Д. Ю. Панов. О приближенном определении положения центра жесткости для симметричного профиля. Доклады Академии Наук СССР, 1934, т. III, № 3. Стр. 168.
5. L. N. G. Filon. On the Resistance to Torsion of Certain Forms of Shafting, with Special Reference to the Effect of Keyways, Phil. Trans. of the Royal Soc. of London, Serie A, vol. № 193, 1900.
6. W. C. Дипсан, loc. cit. (3) p. 65.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ СДВИГЕ<sup>1</sup>

В настоящем докладе рассматривается пластина бесконечной длины, вырезанная из круглого цилиндра вдоль образующих и нагруженная сдвигающими силами интенсивности  $S$  (на единицу длины).

Условия равновесия элемента пластины выражаются дифференциальными уравнениями цилиндрической оболочки. Принимаем для равнодействующих сил и моментов, как обычно, следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= D \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) \right]; \quad T_2 = D \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} \right]; \\ S &= \frac{1-\varepsilon}{2} D \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad G_1 = -B \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]; \\ G_2 &= -B \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]; \quad H_1 = -H_2 = (1-\varepsilon) B \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где:  $D$  — жесткость растяжения,  
 $B$  — жесткость изгиба,  
 $R$  — радиус цилиндра.

Координатными линиями на цилиндрической поверхности служат: образующие цилиндра ( $y = \text{const}$ ) и круги поперечных сечений ( $x = \text{const}$ ). Подстановка выражений (1) в уравнения, данные Love для тонких оболочек, приводят к трем уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\varepsilon}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \bar{S} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{S} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{h^2}{12} \left[ (1-\varepsilon) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right] = 0, \\ \frac{h^2}{12} \nabla^4 w - 2\bar{S} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{R} \left( \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) + \\ &+ \frac{h^2}{12R} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь положено  $\bar{S} = \frac{S}{D}$ .

Дальнейшее основано на упрощении этой системы уравнений.

<sup>1</sup> Доложено 26 декабря 1934 г.

Для упрощения мы пользуемся следующими гипотезами.

1. Величина  $\frac{h}{b}$  мала по сравнению с единицей, если  $h$  есть толщина, а  $b$  есть длина дуги цилиндрической пластины (границами пластины служат линии  $y=0$ ;  $y=b$ ). Безразмерная величина касательной силы  $\bar{S}$ , как можно думать на основании сравнения с подобными же решенными задачами, мала вместе с  $\frac{h}{b}$ .

2. Величина  $\left(\frac{h}{b}\right)^2$  настолько мала, что выражения

$$\left(\frac{h}{b}\right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}, \quad \left(\frac{h}{b}\right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}, \quad \left(\frac{h}{b}\right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$$

можно считать малыми по сравнению с  $\frac{\partial w}{\partial x}$  и  $\frac{\partial w}{\partial y}$ . Опуская малые члены, представим основную систему уравнений так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\ \frac{h^2}{12} \nabla^4 w - 2\bar{S} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \left( \frac{w}{R} - \sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Мы ограничимся случаем пластины опертой по краям. В этом случае граничные условия для функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , если под ними понимать лишь прибавки к смещениям при простом сдвиге, будут:

$$\text{при } y=0 \text{ и при } y=b \quad \begin{cases} w=0 & u=0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 & v=0. \end{cases}$$

Следует заметить, что условие  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$  приближенно выражает равенство нулю момента  $G_2$ ; не надо, однако, забывать, что второе слагаемое  $\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y}$  в выражении этого момента отброшено нами в дифференциальных уравнениях (2'), поэтому мы опускаем его и в граничных условиях.

Система уравнений (2') была впервые получена Donnell'ом; однако, его метод составления уравнений отличается от данного здесь. Можно убедиться непосредственным вычислением, что для решения нашей задачи достаточно найти функциям  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , обращающие в нуль первую вариацию интеграла:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{s} \int_0^b \int_0^s \left\{ \frac{h^2}{12} (\nabla^2 w)^2 + 2\bar{S} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{w^2}{R^2} + \frac{2\sigma}{R} u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2}{R} v \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx dy + \\ & + \frac{1}{S} \int_0^b \int_0^s \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\sigma}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + (1+\sigma) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy \quad (3) \end{aligned}$$

и равные нулю на границе. Здесь  $2s$  есть период функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , которые мы предполагаем периодическими по  $x$ .

Обобщая прием С. П. Тимошенко, будем искать первое приближение решения задачи в виде:

$$\begin{aligned} u &= B \sin \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi}{s} (x - \alpha y); \\ v &= C \sin \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi}{s} (x - \alpha y); \\ w &= A \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi}{s} (x - \alpha y). \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим через  $n$  число волн, не обязательно целое, которое укладывается на длине дуги  $b$ ; точнее говоря, положим  $n = \frac{bs}{2s}$ . Вводя также обозначение  $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha}$ , причем  $\alpha_1$  есть тангенс угла узловой линии с осью  $x$ -осей, получим в результате подстановки выражений (4) в интеграл (3)

$$\begin{aligned} \frac{U}{n\alpha_1} &= A^2 \pi^2 \left\{ \frac{\pi^2}{48} \left( \frac{h}{b} \right)^2 \left[ (2n)^3 \frac{(1 + \alpha_1^2)^2}{\alpha_1} + 4n \left( \alpha_1 + \frac{3}{\alpha_1} \right) + \frac{1}{2n\alpha_1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \bar{S}n + \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{b}{R} \right)^2 \frac{1}{2n\alpha_1} \right\} - AB \frac{\pi \sigma}{2} \left( \frac{b}{R} \right) + AC \frac{\pi}{2\alpha_1} \left( \frac{b}{R} \right) + \\ &\quad + B^2 \frac{\pi^2}{4} \left[ 2n\alpha_1 + \frac{1 - \sigma}{2} \left( \frac{2n}{\alpha_1} + \frac{1}{2n\alpha_1} \right) \right] + \\ &\quad + C^2 \frac{\pi^2}{4} \left[ \frac{2n}{\alpha_1} + \frac{2}{2n\alpha_1} + \frac{1 - \sigma}{2} 2n\alpha_1 \right] - (1 + \sigma) BC \cdot \frac{\pi^2}{4} 2n. \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения параметров  $A, B, C, n, \alpha_1$  служат уравнения:

$$\frac{\partial U}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial B} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial C} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} = 0. \quad (6)$$

Первые три уравнения дают возможность найти  $\bar{S}$  в функции  $n$  и  $\alpha_1$ , именно

$$\begin{aligned} \bar{S} \left( \frac{R}{b} \right)^2 &= \frac{\pi^4}{12} \left( \frac{h}{b} \right)^2 \left( \frac{R}{b} \right)^2 \left[ 4n^2 \frac{(1 + \alpha_1^2)^2}{\alpha_1} + 2 \left( \alpha_1 + \frac{3}{\alpha_1} \right) + \frac{1}{4n^2 \alpha_1} \right] + \\ &\quad + \frac{4n^2 \alpha_1^3 (1 - \sigma^2) + \frac{1}{\alpha_1} + 3\alpha_1 + \frac{1}{4n^2 \alpha_1}}{16n^4 (1 + \alpha_1^2)^2 + 4n^2 \left[ 2 + \left( \frac{2}{1 - \sigma} + \frac{1 - \sigma}{2} \right) \alpha_1^2 \right] + 1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Можно показать, что два последние из у-ний (6) равносильны следующим

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial \bar{S}}{\partial \alpha_1} = 0.$$

Считая очевидным из физических соображений, что эти уравнения выражают условие минимума  $\bar{S}$ , мы приходим к необходимости искать минимум правой части (7) по двум переменным, что можно сделать, например, графически.

Ниже приведены результаты вычислений для некоторых частных случаев. При этом принято  $E = 0,7 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $\sigma = \frac{1}{3}$ ,  $k = \frac{\pi^4}{12} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \left(\frac{R}{b}\right)^2$ ,  $\tau$  — критическое напряжение,  $\tau_0$  — то же для случая  $R = \infty$ . Результаты приводим в следующей таблице:

$\frac{h}{b}$	$\frac{b}{R}$	$k \cdot 10^5$	$\tau \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$	$\tau_0 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$	$\frac{\tau}{\tau_0}$
$\frac{1}{500}$	$\frac{\pi}{2}$	1,3	410	13,8	30
$\frac{1}{333}$	$\frac{1}{2}$	29,2	295	31,1	9,5
$\frac{1}{333}$	$\frac{1}{10}$	731	104	31,1	3,3

### Summary

The present article discusses the problem of an infinite long plate cut out from a circular cylinder along its generators and loaded with shearing forces of an intensity  $S$ . According to Love's theory of thin wall shells this case may be represented by a system of differential equations (2). By means of eliminating the smaller terms in these equations a new system of differential equations is obtained (2).

In the case of a plate with supported edges the problem is reduced to a variational one and may be solved by the Ritz method. The deformations are presented in the form of equations (4). The critical force is expressed by the formula (7), the terms  $n$  and  $\alpha_1$  being selected so as to obtain a minimum in the right part of the equation. The developed theory is illustrated by several numerical examples.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КРУЧЕНИИ

В предшествующем докладе рассматривалась задача устойчивости цилиндрической оболочки при сдвиге, причем, исходя из упрощенных уравнений Love, задача была приведена к некоторой вариационной задаче и последняя решалась приближенным методом типа Ритца. Мы ничего не можем сказать а priori о том, насколько хорошее приближение может дать этот метод. Чтобы до известной степени оценить пригодность этих результатов, мы решаем в настоящей работе тем же методом задачу аналогичную первой, однако, такую, для которой имеются и другие решения.

Рассмотрим круглую цилиндрическую оболочку длины  $b$ , радиуса  $R$ , с толщиной стенки  $h$ . Пусть такая оболочка нагружена по краям касательными силами  $S$  (на единицу длины). Эти равномерно распределенные силы эквивалентны двум крутящим, взаимно-уравновешивающимся парам. Пусть координатными линиями на поверхность оболочки будут образующие цилиндра  $y = \text{const}$  и круги поперечных сечений  $x = \text{const}$ . Дифференциальные уравнения равновесия для этой задачи, очевидно, остаются тем же, что и для предшествующей; граничные условия будут здесь, предполагая оболочку опертую по краям, следующие:

$$\text{при } x=0, x=b \quad \begin{cases} u=0 & w=0 \\ v=0 & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \end{cases}$$

Совершенно тем же путем можно показать, что для решения задачи достаточно найти функции  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , равные нулю на краях оболочки (при  $x=0$ ;  $x=b$ ) и обращающие в нуль первую вариацию интеграла, взятого по всей поверхности оболочки,

$$\begin{aligned} & \iint \left[ \frac{h^2}{12} (\nabla^2 w)^2 + 2\bar{S} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{w^2}{R^2} + \frac{2\sigma}{R} u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2}{R} v \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy + \\ & + \iint \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\sigma}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + (1+\sigma) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx dy. \quad (1) \end{aligned}$$

Имея для бесконечного цилиндра точное решение

$$u = B \cos \frac{\pi}{s} (ax - y); v = C \cos \frac{\pi}{s} (ax - y); w = A \sin \frac{\pi}{s} (ax - y),$$

будем в данном случае искать приближенное решение в виде:

$$\begin{aligned} u &= B \sin \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi}{s} (ax - y); \\ v &= C \sin \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi}{s} (ax - y); w = A \sin \frac{\pi x}{s} \sin \frac{\pi}{s} (ax - y). \end{aligned} \quad (2)$$

Подстановка этих выражений в (1) дает в результате вычислений

$$\begin{aligned} \frac{U}{a} = & A^2 \frac{\pi^4}{48} \left( \frac{h}{b} \right)^2 \left[ \left( \frac{b}{s} \right)^3 \frac{(1+a^2)^2}{a} + 2 \frac{b}{s} \frac{3a^2+1}{a^2} + \frac{s}{b} \right] + \bar{S} \frac{A^2 \pi^2}{2a} \left( \frac{b}{s} \right) + \\ & + \frac{A^2}{4} \left( \frac{b}{R} \right)^2 \frac{s}{b} - AB \frac{\pi \sigma}{2} \left( \frac{b}{R} \right) + AC \frac{\pi}{2a} \frac{b}{R} + \frac{B^2 \pi^2}{4} \left[ \frac{b}{s} + \frac{s}{b} + \frac{1-\sigma}{2a^2} \frac{b}{s} \right] + \\ & + \frac{C^2 \pi^2}{4} \left[ \frac{1}{a^2} \frac{b}{s} + \frac{1-\sigma}{2} \left( \frac{b}{s} + \frac{s}{b} \right) \right] - \frac{BC \pi^2}{4} \frac{1+\sigma}{a} \left( \frac{b}{s} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Так как в интервале  $0 \leq y \leq 2\pi$  укладывается целое число  $n$  волн, то  $2\pi R = 2 \pi a n$ ; поэтому в формулу (3) можно внести  $s = \frac{\pi R}{a n}$  и принять за независимый параметр  $n$  вместо  $s$ . Для определения  $A, B, C, a, n$ , (считая временно, что  $n$  пробегает все значения), имеем уравнения:

$$\frac{\partial U}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial B} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial C} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial a} = 0. \quad (4)$$

Первые три уравнения дают, обозначая  $n_1 = \frac{n}{\pi} \frac{b}{R}$

$$\begin{aligned} 2\pi^2 \left( \frac{R}{b} \right)^2 \bar{S} = & \frac{\pi^4}{12} \left( \frac{h}{b} \right)^2 \left( \frac{R}{b} \right)^2 \left[ n_1^4 \left( a^3 + 2a + \frac{1}{a} \right) + 6a + \frac{2}{a} + \frac{1}{a n_1^4} \right] + \\ & + \frac{(1-\sigma^2) n_1^2 a^3 + \left[ (2-\sigma) a + \frac{1-\sigma}{2a} \right] + \frac{1}{a n_1^4}}{n_1^4 (1+a^2)^2 + n_1^2 \left( 2a^2 + \frac{1-\sigma}{2} + \frac{2}{1-\sigma} \right) + 1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Нетрудно показать, что два последние из у-ний (4) равносильны следующим:

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial \bar{S}}{\partial n} = 0.$$

Задача сводится к определению минимума  $\bar{S}$  относительно двух переменных  $a$  и  $n$ .

Ниже приведены результаты вычислений для некоторых частных случаев. Определение минимума произведено графически.

Для сравнения приведены результаты, полученные по формулам Donnell'я<sup>1</sup>. Как и в примерах предыдущего доклада, взято

$$E = 0,7 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}; \quad \sigma = \frac{1}{3}.$$

$\frac{h}{b}$	$\frac{b}{R}$	$\tau \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$	$\frac{\tau}{\tau_0}$	$\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ по Donnell'ю
$\frac{1}{500}$	$\frac{\pi}{2}$	366	26,5	326
$\frac{1}{333}$	$\frac{1}{2}$	238	7,6	234
$\frac{1}{333}$	$\frac{1}{10}$	81,5	2,6	87

<sup>1</sup> Donnell. The Stability of the thin-walled tubes in Torsion. NACA. № 479. 1934.

## Summary

The problem discussed in the present article aims to show the degree of accuracy, which may be expected from the approximate method used in the preceding article. Being greatly similar to the problem of shear (the difference lies in the boundary conditions only) the problem of torsion has been largely discussed in literature. The application of the method of analysis developed by the author to the problem of torsion leads to a final formula (5). The comparison of results obtained by this method with L. H. Donnel results (NACA Rep. 479) presented in the form of a table, shows a satisfactory agreement of the both methods.

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ФОРМА ИНТЕГРАЛЬНОГО УСЛОВИЯ В ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Предложенное Т. Карманом интегральное условие основано на теореме о количестве движения. Мы предлагаем другую форму интегрального условия, основанную на теореме живых сил, т. е. применяем хорошо известную в гидравлике теорему Бернулли.

Сохраним те же допущения и приближения, которые приняты Прандтлем и Карманом. Для установившегося ламинарного пограничного слоя имеем:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \frac{\rho u^3}{2} dy - \frac{1}{2} \rho u_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy = -\mu \int_0^{\delta} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy - \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy \right\} \quad (1)$$

Здесь  $x$  отсчитывается по обтекаемому контуру от точки разветвления (при входе), координата  $y$  направлена по нормали к нему. Компонент скорости, параллельный  $x$ , обозначен через  $u$ , гидродинамическое давление через  $p$ , толщина пограничного слоя через  $\delta(x)$ , коэффициент абсолютной вязкости через  $\mu$ , плотность жидкости через  $\rho$ , кинематическая вязкость  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ , время через  $t$ , скорость потенциального обтекания через  $u_0(x)$ .

Для случая плоской пластинки имеем:

$$u_0 = \text{const}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad z = \frac{y}{\delta}, \quad u = u_0 f(z), \quad (2)$$

причем на  $f(z)$  налагаются условия:

$$\left. \begin{aligned} f &= 0 \\ \frac{df}{dz} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } z=0$$

$$\frac{df}{dz} = 0 \quad \text{при } z=1. \quad (3)$$

Уравнение (1) тогда примет вид:

$$\frac{d\delta}{dx} \int_0^1 (f - f^3) dz = \frac{2\mu}{\rho u_0 \delta} \int_0^1 \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz, \quad (4)$$

что может быть представлено в виде:

$$2\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu \varepsilon^2}{\rho u_0}, \quad (5)$$

если ввести обозначение.

$$\varepsilon^2 = \frac{4 \int_0^1 \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz}{\int_0^1 (f - f^3) dz}, \quad (6)$$

Интегрируя уравнение (5) при условии  $\delta = 0$  при  $x = 0$ , получим:

$$\delta = \varepsilon \sqrt{\frac{\mu x}{\rho u_0}}. \quad (7)$$

Сила трения  $\tau$  определяется из формулы

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0},$$

которая на основании (2) приводится к виду

$$\tau = \frac{\mu u_0}{\delta} \left( \frac{df}{dz} \right). \quad (8)$$

Как числовые примеры имеем:

$$1) f = \frac{3}{2}z - \frac{1}{3}z^3;$$

$$\delta = 4,75 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho u_0}}; \quad \tau = 0,315 \sqrt{\frac{\mu \rho u_0^3}{x}};$$

$$2) f = 2z - 3z^3 + z^4;$$

$$\delta = 5,67 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho u_0}}; \quad \tau = 0,353 \sqrt{\frac{\mu \rho u_0^3}{x}};$$

$$3) f = \sin \frac{\pi z}{2}$$

$$\delta = 4,79 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho u_0}}; \quad \tau = 0,327 \sqrt{\frac{\mu \rho u_0^3}{x}}.$$

Вычисление Блазиуса дает

$$\tau = 0,332 \sqrt{\frac{\mu \rho u_0^3}{x}}.$$

Что близко к данным выше цифрам  $\tau$ .

Вводя функцию рассеяния

$$F = \frac{1}{2} \mu \int_0^x dx \int_0^{\delta} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy, \quad (9)$$

мы получим согласно (2) для случая плоской пластинки.

$$F = \frac{1}{2} \rho u_0 x \sqrt{\frac{u_0 x}{\nu}} \sqrt{S}, \quad (10)$$

где введено обозначение

$$S = \int_0^1 \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz \int_0^1 (f - f^3) dz. \quad (11)$$

Из аналитической формы  $S$  следует отсутствие максимума  $S$ . Однако, предполагая, что  $f(z)$  всегда удовлетворяет условиям (3) и представляет исключительно кривые, вогнутые по отношению к оси  $Oy$  (как единственно возможные гидродинамически), мы можем выбрать для  $f(z)$  полином конечной степени, не ниже четырех, и неопределенные коэффициенты этого полинома определить из условия максимума  $S$ .

Так, выбирая

$$f(z) = A_1 z + A_3 z^3 + A_4 z^4, \quad (12)$$

причем, согласно (3),

$$A_3 = 4 - 3A_1; \quad A_4 = 2A_1 - 3, \quad (13)$$

мы получим максимум  $S$  как функции  $A_1$  из условия

$$\frac{dS}{dA_1} = 0, \text{ что дает } A_1 = 2.$$

Сравнивая (12) и (5), мы получим совпадение.

Для стационарного турбулентного пограничного слоя имеет место уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \frac{1}{2} \rho u^3 dy - \frac{1}{2} \rho u_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u dy = -\tau_0 u_0 - \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^\delta u dy, \quad (14)$$

где для случая закона распределения скоростей корня седьмой степени имеем:

$$\tau_0 = 0,0225 \rho u_0^2 \left( \frac{\nu}{u_0 \delta} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (14')$$

Для случая плоской пластинки мы имеем:

$$u_0 = \text{const}; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad u = u_0 \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}},$$

тогда полная сила трения жидкости на пластинке длины  $L$  будет иметь величину:

$$W = \frac{1}{2} \rho u_0^2 L \frac{0,0706}{\sqrt[5]{\frac{L u_0}{\nu}}}. \quad (15)$$

Для поверхности вращения имеем: 1) случай ламинарного пограничного слоя:

$$\frac{\partial}{\partial S} \int_0^\delta r u^3 dy - u_0^2 \frac{\partial}{\partial S} \int_0^\delta r u dy = -2\nu \int_0^\delta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 r dy - \frac{2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S} \int_0^\delta r u dy; \quad (16)$$

2) случай турбулентного пограничного слоя:

$$\frac{\partial}{\partial S} \int_0^\delta r u^3 dy - u_0^2 \frac{\partial}{\partial S} \int_0^\delta r u dy = -2r u_0 \tau_0 - \frac{2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S} \int_0^\delta r u dy, \quad (17)$$

здесь:

$r$  — расстояние точек обтекаемой поверхности от оси вращения;  
 $y$  — направлено по нормали к поверхности;  
 $dS$  — элемент дуги меридиана поверхности.

## Summary

According to the principle of vis viva we obtain for a laminar boundary layer a new form of the integral condition (1). For the steady motion of a liquid streaming past a plane lamina we obtain the equation (4), which is calculated by Polhausen's method and gives for the frictional force a quantity that is very near to Blasius's formula.

For a steady turbulent boundary layer we obtain a new analogical condition (10) from which the frictional force may be calculated according to the formula (11). For the boundary layer of a solid of revolution the formulae (12') take place.

## К ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Будем отсчитывать координату  $x$  по обтекаемому контуру от точки разветвления, а координату  $y$  по нормали к этому контуру. Компонент скорости параллельно  $x$  обозначим через  $u$ , скорость потенциального обтекания через  $u_0(x)$ , плотность жидкости через  $\rho$ , ее абсолютную вязкость через  $\mu$ .

Пусть  $\delta_1(x)$  есть толщина подстилающего ламинарного подслоя, а  $\delta_2(x)$  есть полная толщина всего пограничного слоя, включая сюда и ламинарный подслой.

Распределение скоростей в ламинарном подслое примем в виде:

$$u_1 = v \left[ A \frac{y}{\delta_1} - B \left( \frac{y}{\delta_1} \right)^2 + C \left( \frac{y}{\delta_1} \right)^k \right] \quad (1)$$

$$0 \leq y \leq \delta_1; \quad k \geq 3.$$

Здесь  $v(x)$  есть скорость на верхней границе ламинарного подслоя. Для  $y = \delta_1$ , мы получим поэтому

$$A - B + C = 1, \quad (2)$$

причем условие Стокса  $u_1 = 0$  для  $y = 0$  удовлетворяется само собою.

Остается лишь условие Польгаузена

$$\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -\rho u_0 u_0' \quad \text{для } y = 0. \quad (3)$$

Распределение скоростей в турбулентном слое

$$\delta_1 \leq y \leq \delta_2$$

дано законом Прандтля—Кармана.

На границе обоих слоев  $y = \delta_1$  имеют место условия

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = v \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} u_1 &= u_2 = v \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{aligned}} \right\} y = \delta_1 \quad (5)$$

(Ф. И. Франкль указал мне при докладе, что согласно опытам Никурадзе второе из условий (5) должно быть заменено условием

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \lambda \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad (5)$$

где  $\lambda$  отлично от единицы. Эта идея будет проведена в работе А. Козьмодемьянского).

Сверх того имеет место условие для силы трения.

$$\left. \begin{aligned} u \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} &= \alpha \rho u_0^2 \left( \frac{\nu}{u_0 \delta_2} \right)^n \\ n &= \frac{2m}{m+1}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

причем для  $m = \frac{1}{7}$  имеем  $\alpha = 0,0225$ .

Для случая плоской пластинки вычисления сильно упрощаются, так как имеем

$$u^0 = \text{const}; u'_0 = 0,$$

что дает легко:

$$B = 0, A = \frac{k-m}{k-1}, C = \frac{m-1}{k-1},$$

отсюда вычисляем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_1}{\delta_2} &= \varepsilon \left( \frac{\nu}{u_0 \delta_2} \right)^{\frac{1}{m+1}} \\ \varepsilon &= \left[ \frac{k-m}{\alpha(k-1)} \right]^{\frac{1}{m+1}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Таким образом отношение  $\frac{\delta_1}{\delta_2}$  не зависит от  $k$ . Для  $m = \frac{1}{7}$  имеем

$$76 < \varepsilon < 127. \quad (8)$$

Так как

$$v = u_0 \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^m, \quad (9)$$

то из (7) и (9) получим:

$$v = \frac{u_0 \varepsilon^m}{\left( \frac{u_0 \delta_2}{\nu} \right)^{\frac{m}{m+1}}} \quad (10)$$

(В знаменитом курсе гидро-аэродинамики (т. II) Людвига Прандтля уже был рассмотрен частный случай (1) при

$$B = C = 0.$$

В случае кривой поверхности простая формула (7) уже не имеет места и отношение  $\frac{\delta_1}{\delta_2}$  вычисляется из более сложного уравнения как функция  $x, u_0, u'_0$ .

Из теории турбулентного пограничного слоя получается известное соотношение:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_0 \delta_2}{\nu} &= \gamma \left( \frac{u_0 x}{\nu} \right)^{\frac{m+1}{3m+1}}, \\ \gamma &= \left[ \frac{\alpha(3m+1)^2}{m} \right]^{\frac{m+1}{3m+1}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

причем для  $m = \frac{1}{7}$  имеем  $\gamma = 0,38$ .

Из (10) и (11) получается:

$$\left. \begin{aligned} v &= u_0 \eta \left( \frac{y}{u_0 x} \right)^{\frac{m}{3m+1}} \\ \eta &= \frac{\varepsilon^m}{\gamma^{\frac{m}{m+1}}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

причем при  $m = \frac{1}{7}$  получается

$$\eta = 2,25.$$

В приложениях можно считать, что скорость  $v(x)$  на границе ламинарного и турбулентного пограничного слоев дана формулой (12) по известной скорости  $u_0(x)$  потенциального обтекания и прилагать приближенно эту формулу также к обтеканию криволинейных контуров. Очевидно, что максимум давления потенциального обтекания уже не будет соответствовать максимуму давления в ламинарном подслое, как это имеет место в случае обычного ламинарного слоя. Применяя формулу (12) к обтеканию круглого цилиндра радиуса  $a$ , мы имеем (обычные обозначения):

$$u_0 = 2w \sin \theta, \quad (13)$$

внося (13) в (12), получим при

$$m = \frac{1}{7}, D = 2a,$$

что скорость  $v$  дана формулой

$$\begin{aligned} v &= \eta_0 w \frac{(\sin \theta)^{0,9}}{(\theta)^{0,1}} \\ \eta_0 &= \frac{45}{\left( \frac{wD}{v} \right)^{0,1}} \end{aligned} \quad (14)$$

Взяв производную по  $\theta$ , получим уравнение

$$\operatorname{tg} \theta = 9\theta,$$

откуда определим для места максимального давления  $\theta = 85^\circ 45'$ , что близко к значению  $\theta = 85^\circ$ , полученному Fage в своих опытах для вполне развитого турбулентного обтекания при  $w = 22,4$ .

Точка отрыва вычисляется, применяя условие отрыва Прандтля к ламинарному подслою:

$$\frac{dv}{dy} = 0 \text{ при } y = 0. \quad (15)$$

Пользуясь формулами нашей статьи в т. 41 Математического сборника, мы вводим функцию

$$\varphi(t) = \eta t^{0,8} (1 - 0,97t)$$

и получаем для

$$t = \operatorname{stn}^2 \frac{\theta}{2} = 0,646,$$

откуда  $\theta = 107^\circ$ ,

В рассмотренном случае  $w = 22,4$  Fage получил  $\theta = 105^\circ$ . Вычисление по методу Польгаузена дало  $103,5^\circ$ .

При вычислении силы трения можно пользоваться обычной формулой Блазиуса, внося туда вместо  $u_0$  скорость  $v$ . Учет существования ламинарного подслоя приводит для обтекания пластинки к более сложной формуле для силы трения, чем данная Карманом.

## Summary

In the case of a steady motion of a liquid streaming past a plane lamina we determine by the formula (7) the relation of the thickness of the laminar layer  $\delta$  to the total thickness of the whole layer  $\delta_2$  (including  $\delta_1$ ).

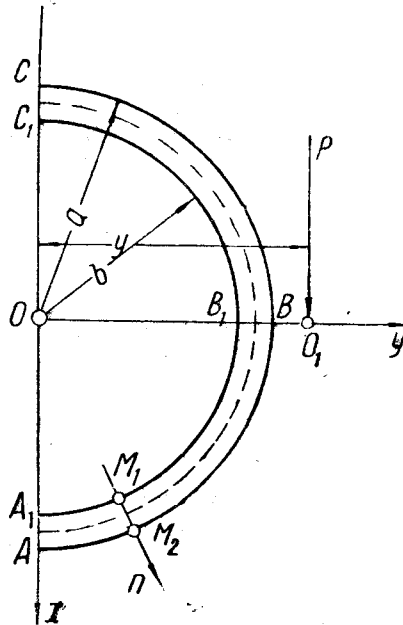
The velocity at the boundary of the laminar sublayer is determined by the formula (10). Substituting the value of  $\gamma$  [from the formula (11)], we shall obtain the final value (12) for the velocity  $v$  at the boundary of the laminar sublayer.

Using this formula for the case of the flow around a circular cylinder we can determine  $v$  from the formula (14). We obtain maximal pressure for  $\theta = 85^\circ 45'$ . The breaking point of the boundary layer is calculated from the condition (15). The calculation gives us  $\theta = 107^\circ$ . These values of  $\theta$  are approximate to Fage's experiments for  $w = 22,4$  m/s.

## О ЦЕНТРЕ ИЗГИБА ТОНКОСТЕННЫХ НЕЗАМКНУТЫХ ПРОФИЛЕЙ

Эта проблема, поставленная экспериментально проф. К. Бахом, получила приближенное решение в работе К. Вебера.

Можно получить точное решение в ниже приведенном случае. Пусть мы имеем профиль органиченный: двумя концентрическими полуокружностями (фиг. 1):  $ABC$  радиуса  $a$  и  $A_1B_1C_1$  радиуса  $b$ , а также отрезками радиусов  $AA_1$  и  $CC_1$ . Оси координат взяты, как показано на чертеже. Ось  $Oz$  направлена нормально к плоскости чертежа. Постановка задачи



об изгибе заделанного на одном конце бруса силой  $P$  перпендикулярной к оси  $Oy$  берется по Сен-Венану. По примеру<sup>2</sup> проф. С. П. Тимошенко и проф. В. Г. Галеркина вводится функция напряжений. Напряжения сдвига даны известными формулами:

$$X_z = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{A}{2} [x^2 - f(y)]; \quad Y_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad A = \frac{P}{J}. \quad (1)$$

$J$  — момент инерции сечения профиля около оси  $Oy$ . Функция  $\varphi(x, y)$  удовлетворяет уравнению<sup>1</sup>

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = A \left[ \frac{\sigma(y - y_0)}{1 + \sigma} - \frac{1}{2} f'(y) \right] - 2\mu\tau. \quad (2)$$

$\sigma$  — коэффициент Пуассона,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\tau$  — крутка.  $y_0$  — координата центра тяжести

$$y_0 = \frac{4(a^2 + ab + b^2)}{3\pi(a + b)}.$$

Для функции  $\varphi$  имеется граничное условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{A}{2} [x^2 - f(y)] \frac{\partial y}{\partial s}. \quad (3)$$

$ds$  — элемент дуги контура.

Выбираем

$$f(y) = a^2 - y^2,$$

тогда функция  $\varphi$  должна удовлетворять следующим граничным условиям:

- 1)  $\varphi = 0$  для  $r = a$  ( $ABC$ )
- 2)  $\varphi = 0$  для  $y = 0$  ( $AA_1, CC_1$ )
- 3)  $\varphi = -\frac{A}{2}(a^2 - b^2)y$  для  $r = b$  ( $A_1B_1C_1$ ).

Искомая функция  $\varphi$  имеет вид

$$\varphi = y \left[ C_1 r^2 + C_2 + \frac{C_3}{r^2} \right] + \frac{1}{4} C \left[ r^2 (1 + \cos 2\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_m r^m + \frac{B_m}{r^m} \right) \cos m\theta \right]. \quad (4)$$

Здесь:

$$r^2 = x^2 + y^2;$$

$$C = -2\mu\tau - \frac{A\sigma y_0}{1 + \sigma};$$

$$C_1 = \frac{A(1 + 2\sigma)}{8(1 + \sigma)};$$

$$C_3 = -\frac{Aa^2b^2(3 + 2\sigma)}{8(1 + \sigma)};$$

$$C_2 = \frac{A}{8(1 + \sigma)} [b^2(3 + 2\sigma) - a^2(1 + 2\sigma)]$$

$$A_m = \frac{E_m}{a^{2m} - b^{2m}} (b^{m+2} - a^{m+2}),$$

$$B_m = \frac{E_m}{a^{2m} - b^{2m}} (a^{-m+2} - b^{-m+2})$$

$$E_m = \frac{16 \sin \frac{m\pi}{2}}{m\pi(m^2 - 4)}$$

Причем здесь  $m = 1, 3, 5, 7 \dots$

Угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $Oy$  к оси  $Ox$ . Если сила  $P$  проходит через центр изгиба  $O_1$ , то в этом случае отсутствует кручение профиля ( $\tau=0$ ) и взяв момент относительно  $O_1$ , получим уравнения

$$P\bar{y} + M = 0 \quad (5)$$

$$M = \iint (Y_z x - X_z y) dx dy \quad (6)$$

Из (1) и (6) имеем по формуле Грина

$$M = - \int \varphi (x dy - y dx) + 2 \iint \varphi dx ay + \frac{1}{2} A \iint [x^2 - f(y)] y dx dy. \quad (7)$$

Здесь криволинейный интеграл взят по всему контуру профиля, а двойные интегралы распространены на всю площадь профиля. Из (5) и (7) можно получить внося:

$$A = \frac{P}{J}. \quad J = \frac{\pi}{8} (a^4 - b^4)$$

следующее значение координаты  $\bar{y}$  центра изгиба:

$$\bar{y} = \frac{8(a-b)\psi(a,b)}{15\pi(1+\sigma)(a^4-b^4)} - \frac{8\sigma(a-b)^3(a^2+ab+b^2)}{9\pi(1+\sigma)(a^4-b^4)}, \quad (8)$$

где обозначено:

$\psi(a,b) = 3(a^4 + a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 + b^4) + 4\sigma(a^4 + a^3b + 3,5a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ , (8) причем вычисление интеграла, относящегося к бесконечному ряду формулы (4), сделано приближенно, так как он, при малой толщине профиля  $t = a - b$  начинается с члена порядка  $t^3$ , даваемого аналогией Прандтля при кручении. Обозначая

$$\zeta = \frac{t}{a}.$$

получим, отбрасывая члены, начиная с  $\zeta^3$

$$\bar{y} = \frac{4a}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{2} \zeta - \frac{1}{4} \zeta^2 \right). \quad (9)$$

По способу К. Вебера легко получить

$$\bar{y} = \frac{4a}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{2} \zeta \right). \quad (9')$$

Следовательно, метод Вебера дает здесь достаточное приближение. Можно к рассматриваемой задаче применить приближенный прием, подобный методу W. Dunsen'a в аналогичной проблеме о кручении. В рассматриваемой проблеме должно исходить из формул (5) и (7). Так как значения  $\varphi$  на граничном контуре вычисляются легко интегрированием уравнения (3), то вся трудность при приложении (7) заключается в вычислении интеграла

$$\iint \varphi dx dy.$$

Но ввиду тонкостенности профиля достаточно точно применять линейную интерполяцию внутри контура и приближенно принять, что на отрезке нормали  $M_1M_2$  к средней линии контура (фиг. 2) функция  $\varphi$  имеет значение

$$\varphi = \frac{1}{2} [\varphi(M_1) + \varphi(M_2)], \quad (10)$$

вследствие чего

$$\iint \varphi dx dy = \frac{1}{2} \int [\varphi(M_1) + \varphi(M_2)] t ds_0, \quad (10')$$

где  $t$  — переменная толщина контура, считая по нормали к средней линии контура, элемент которой  $ds_0$ , причем контурный интеграл взят по средней линии. В приложении к рассмотренной задаче это дает с принятой точностью

$$\bar{y} = \frac{4a}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{12}\zeta^2 \right), \quad (11)$$

сравнивая с (9), имеем относительную ошибку  $= \frac{1}{6}\zeta^2$ .

Применяя формулу (10'), мы удовлетворяем уравнения равновесия, но не удовлетворяем условия совместности Сен-Венана, так как  $\varphi$  не удовлетворяет уравнению (2).

Применение изложенного метода к замкнутым тонкостенным профилям сделано будет в другой статье.

#### Л и т е р а т у р а

1. С. Weber. Z.A.M.M. 1924. Т. IV. Стр. 334.
2. С. Тимошенко. Теория упругости. 1934 г. Т. I. Гл. X.  
В. Г. Галеркин. Решение задачи Сен-Венана об изгибе. Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения, 1927 г.
3. Л. Лейбензон. О центре изгиба. Технические заметки ЦАГИ, № 45. 1935.

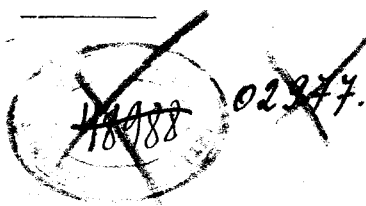
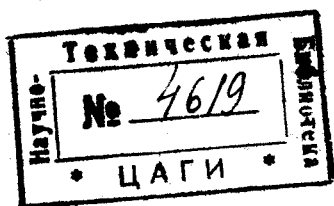
#### S u m m a r y

An exact solution of the problem of bending of thin walled section presented on fig. 1 is given. The stress function  $\varphi(x, y)$  is determined from the equation (2) (given by the author [3]) under the boundary condition (3). The unknown function  $\varphi(x, y)$  is given by formulae (4) and (4'). The coordinate of the flexural centre  $O_1$  is given by the formula (5). The moment  $M$  is calculated from formula (7). The final value of  $\bar{y}$  is given by the formula (8) from which the formula (9) is obtained. The approximate method of solution is based upon the calculation of the integral

$$\iint \varphi dx dy$$

according to formula (10').

Applying this method to considered section formula (11) is obtained.



Стр. 22. Строка 4 и 5 снизу. Напечатано: the velocity  $u$  and the density  $\rho$  of the free stream, the velocity at the wall of the laminar sublayer and the basic turbulent layer  $u \dots$ . Должно быть: the velocity  $\bar{u}$  and the density  $\bar{\rho}$  of the free stream, the velocity at the boundary of the laminar sublayer and the basic turbulent layer  $u_1 \dots$ .

Стр. 19. Строка 6 сверху. Напечатано:  $u$ . Должно быть:  $\bar{u}$

" 16 " Напечатано:  $u' = l_y \frac{\partial u}{\partial y}$ . Должно быть:  $u' = l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$

" 18 " Ф-ла (7). Напечатано:  $T' = l_y \frac{\partial T}{\partial y}$ . Должно быть:  $T' = l_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$

Стр. 50. Строка 3 снизу. Напечатано:  $B_m = \frac{E_m}{a^{2m} - b^{2m}} (a^{-m+2} - b^{-m+2})$ . Должно быть:  $B_m = \frac{E_m}{a^{2m} - b^{2m}} (a^{-m+2} - b^{-m+2}) a^{2m} b^{2m}$

# **Поправка к статьям „Теплопередача в турбулентном пограничном слое при больших скоростях в сжимаемом газе“ и „Трение в турбулентном пограничном слое при больших скоростях в сжимаемом газе“.**

Настоящий сборник находился уже в печати, когда М. Ф. Широков (Всесоюзный теплотехнический институт) сообщил мне о том, что, согласно полученному им неопубликованному еще результату, в ламинарном подслое нельзя пренебречь рассеянием энергии.

Вследствие этого кривую распределения температуры в ламинарном подслое нельзя рассматривать, как прямую. Вместо этого мы получим параболу

$$T = T_* - \frac{q}{\lambda_*} y - \frac{\tau^2}{2J\mu_*\lambda_*} y^2$$

Следовательно уравнение (23) первой статьи (стр. 21) заменяется уравнением

$$q = \tau \frac{c_p (T_* - \bar{T}) - \frac{\bar{u}^2 + (Pr - 1) u_1^2}{2J}}{\bar{u} + (Pr - 1) u_1}$$

и аналогично уравнение (12) второй статьи (стр. 25) заменяется уравнением

$$\frac{1}{\sigma} = 1 + \frac{\theta}{Pr} [\gamma + s(Pr - 1)] - \frac{k - 1}{2k} \gamma [\gamma^2 - (Pr - 1) s^2].$$

Соответственно меняются остальные выводы наших статей, в частности изменится количественно зависимость коэффициента трения от  $Ba$ . Поправленный результат будет сообщен после пересчета.

Заметим еще, что А. А. Гухман и его сотрудники (Ленинград) экспериментально констатировали значительное снижение коэффициента трения в трубах при растущем  $Ba$ .